Série A N° 2163
N° d'ordre : 3034

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

P. LAPOSTOLLE

1re THÈSE : Étude des diverses ondes susceptibles de se propager dans une ligne en interaction avec un faisceau électronique.
Application à la théorie de l'amplificateur à onde progressive.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 31 Mai 1947, devant la Commission d'Examen :

MM. L. de BROGLIE, *Président.*
F. PERRIN, PAUTHENIER } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE
165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur.
PARIS 15e
1947

Série A N° 2163
N° d'ordre : 3034

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

P. LAPOSTOLLE

1re THÈSE : Étude des diverses ondes susceptibles de se propager dans une ligne en interaction avec un faisceau électronique.
Application à la théorie de l'amplificateur à onde progressive.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 31 Mai 1947, devant la Commission d'Examen :

MM. L. de BROGLIE, *Président.*
F. PERRIN, PAUTHENIER } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE
165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur,
PARIS 15e
1947

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. J. Cabannes.

PROFESSEURS

L. Blaringhem.....	T	Botanique.
G. Julia.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. Mauguin	T	Minéralogie.
A. Denjoy.....	T	Théorie des Fonctions.
L. Lutaud	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. Darmois	T	Enseignement de Physique.
Robert Lévy.....	T	Physiologie comparée.
Henri Villat	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. Jacob	T	Géologie.
P. Pascal.....	T	Chimie générale.
M. Fréchet.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Mme Ramart-Lucas	T	Chimie organique.
H. Béghin	T	Mécanique physique expérimentale.
Foch.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
Pauthenier.....	T	Électrotechnique générale.
De Broglie	T	Théories physiques.
Job	T	Chimie générale.
Prenant.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
Villey	T	Mécanique appliquée.
Combes	T	Physiologie végétale.
Garnier	T	Géométrie supérieure.
Pérès	T	Mécanique rationnelle.
Hackspill	T	Chimie minérale.
Laugier	T	Physiologie générale.
Toussaint	T	Technique aéronautique.
M. Curie.....	T	Physique (P. C. B.).
G. Ribaud	T	Hautes températures.
Chazy.....	T	Mécanique analytique.
H. Gault	T	Chimie appliquée.
Croze	T	Physique théorique et physique céleste.
Dupont.....	T	Théories chimiques.
Lanquine	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
Valiron.....	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
Barrabé		Géologie structurale et géologie appliquée.
Vavon	T	Analyse et mesures chimiques.
G. Darmois	T	Mathématiques générales.
Chatton	T	Biologie maritime.
Aubel	T	Chimie biologique.
Jacques Bourcart .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme Joliot-Curie.	T	Physique générale et Radioactivité.
Plantefol	T	Botanique.
Cabannes	T	Recherches physiques.
Grassé	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Prévost.....		Chimie organique.
Bouligand	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
Chaudron	T	Chimie.
Wyart		Minéralogie.
Teissier	T	Zoologie.
Mangenot	T	Biologie végétale.
P. Auger.....	T	Physique quantique et Relativité.
Monnier.....		Physiologie générale.
Piveteau.....		Géologie,
Rocard.....	T	Physique.
H. Cartan.....		Calcul différentiel.
Schaeffer	T	Physiologie des fonctions.
Laffitte.....		Chimie (P. C. B.).
Leray		Mécanique théorique des fluides.
Favart		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Coulomb	T	Physique du globe.
Mlle Cousin		Biologie animale (P, C. B.).
Chrétien		Analyse et mesures chimiques.
Drach		Évolution des êtres organisés.
Chatelet	T	Arithmétique et théorie des nombres.
Ephrussi	T	Génétique.
Wurmser	T	Biologie physico-chimique.
Kastler		Physique.
Bauer	T	Chimie-Physique
Rivière		Géologie (P. C. B.).
Gautheret	T	Biologie végétale (P. C. B.).
Lucas		Physique.
Max Morand		Physique.
Arnulf		Optique appliquée.
A. Thomas		Zoologie.
Soleillet.....		Physique.
Forter		Mécanique expérimentale des fluides.
Danjon	T	Astronomie.
Fromageot		Chimie biologique.
Laporte	T	Physique générale et Radioactivité.

Secrétaire..... Ch. Monier.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A mes parents

ÉTUDE DES DIVERSES ONDES SUSCEPTIBLES DE SE PROPAGER DANS UNE LIGNE EN INTERACTION AVEC UN FAISCEAU ÉLECTRONIQUE

APPLICATION A LA THÉORIE DE L'AMPLIFICATEUR A ONDE PROGRESSIVE

par Pierre LAPOSTOLLE *

Ingénieur des P. T. T.

SOMMAIRE. — *On considère un dispositif constitué par une ligne à retard et un faisceau électronique ; ce dernier circule de façon telle qu'il puisse échanger de l'énergie avec les champs électromagnétiques existant dans la ligne.*

Il est possible de mettre en évidence un certain nombre d'ondes susceptibles de se propager dans la ligne en présence des électrons. Pour certaines valeurs de la vitesse du faisceau, il existe une onde dont l'amplitude va en croissant le long du tube. L'ensemble de toutes les ondes permet d'interpréter les phénomènes d'amplification dans le tube à onde progressive.

L'étude faite sur des modèles particuliers a été généralisée à une ligne à retard quelconque. *La théorie est applicable à des faisceaux de diamètre, d'intensité et de vitesse arbitraires et on a tenu compte des pertes dans la ligne.*

On a construit un certain nombre de courbes permettant de résoudre, dans le cas particulièrement important de faisceaux assez intenses, un grand nombre de problèmes d'ordre pratique.

INTRODUCTION

L'évolution de la technique des ondes courtes pendant ces 10 dernières années se montre caractérisée par l'emploi de fréquences de plus en plus élevées ; on utilise couramment aujourd'hui des fréquences de l'ordre de quelques milliers et même dizaines de milliers de mégacycles par seconde, c'est-à-dire presque 100 fois plus élevées que celles employées il y a seulement 10 ans. A ce propos peut-être n'est-il pas sans intérêt de remarquer que cette tendance ne manifeste qu'un retour dans le domaine des ondes sur lesquelles HERTZ a fait ses premières expériences.

Pourtant, alors que l'on sait aujourd'hui construire des tubes produisant ces fréquences avec un rendement élevé (supérieur à 50 % pour certains magnétrons), il n'existe actuellement que peu d'amplificateurs utilisables dans cette gamme d'ondes et leurs performances sont généralement médiocres.

Quelles sont donc les qualités souhaitables pour un bon amplificateur ou, en d'autres termes, comment peut-on chiffrer son « mérite » ?

Supposons que le signal que nous désirons amplifier dans notre tube soit périodique, ou même, pour fixer les idées, sinusoïdal. (On sait que s'il est périodique il sera en réalité la somme de signaux sinusoïdaux.) Soit alors

$$A \sin 2\pi\nu t$$

ce signal. Si nous l'injectons dans l'amplificateur, nous recueillerons à la sortie :

$$Ag(\nu) \sin 2\pi\nu t.$$

Le coefficient $g(\nu)$, *gain de l'amplificateur* à la fréquence ν, doit être en module supérieur à 1 pour qu'il y ait amplification. D'ailleurs $|g|^2$ représente le rapport des énergies, à la sortie et à l'entrée du tube. Il est bien clair que la première qualité d'un amplificateur sera d'avoir un *gain important.*

La deuxième qualité est liée à ce qu'on appelle sa « *bande passante* ». Le gain g dépend de la fréquence ν. On appelle bande passante de l'amplificateur la mesure $\Delta\nu$ de l'ensemble des valeurs pour lesquelles $|g(\nu)|^2$ est supérieur à la moitié de sa valeur maximum.

Il y a grand intérêt à ce que la bande passante soit la plus large possible. On est en effet conduit à chercher à amplifier des signaux dont le spectre en fréquence devient de plus en plus riche, c'est-à-dire s'étend sur des bandes de plus en plus larges. La transmission de communications téléphoniques multiplex à grand nombre de voies, ou de la télévision à haute définition, exige par exemple des bandes de plusieurs dizaines de mégacycles par seconde.

Et c'est précisément l'intérêt des ondes très courtes de fournir des bandes larges en valeur absolue, tout en conservant à la bande relative $\Delta\nu/\nu$ une valeur faible, compatible avec des surtensions élevées.

Un bon amplificateur est donc celui qui a un *gain élevé sur une bande large.*

Voyons dans quelle mesure ces deux désirs peuvent être simultanément satisfaits et considérons pour cela des modèles d'amplificateurs actuellement existants.

Le modèle le plus classique est l'*amplificateur à triode.* Si l'on a plusieurs étages d'amplification utilisant le même type de lampes convenablement couplées, il est bien connu que si C désigne la somme

* au C. N. E. T. Division Tubes et Hyperfréquences.

des capacités grille-cathode et plaque-cathode des tubes, le produit $|g|\ \Delta\nu$ par étage est d'autant plus petit que C est plus grand :

$$(1) \qquad |g|.\Delta\nu \leqslant \frac{B}{C} = k \qquad [B, \text{ constante}].$$

Pour augmenter $|g|.\Delta\nu$, on pourra chercher à diminuer C. Mais toutes choses égales d'ailleurs cela conduira à écarter les électrodes. On augmentera ainsi le temps mis par les électrons pour parcourir les espaces interélectrodes, c'est-à-dire ce qu'on appelle leur *temps de transit.*

En basse fréquence, le temps de transit est négligeable vis-à-vis de la période. Il en résulte que chaque électron voit au cours de son déplacement le champ électrique dans les mêmes conditions de phase.

Il n'en sera plus de même si la fréquence devient très élevée et tel électron qui aura été accéléré pendant la première moitié de sa trajectoire pourra fort bien être freiné pendant la seconde moitié. Sans analyser davantage ce phénomène, il est bien évident que l'interaction énergétique moyenne entre le champ et les électrons aura un rendement rapidement très faible si le temps de transit dépasse une certaine valeur [1].

Comment minimiser l'influence nuisible du temps de transit ?

Ce temps proportionnel à la distance est inversement proportionnel à la vitesse.

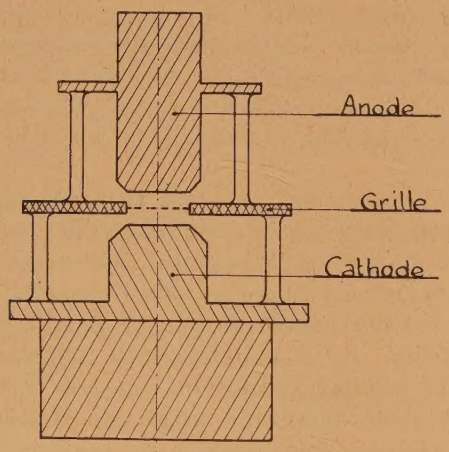

Fig. 1.

Réduire la distance ne semble pas compatible avec un facteur de mérite k, défini par (1), élevé. C'est pourtant la solution adoptée dans les triodes dites lampes-phares (fig. 1) (lighthouse on disc-seal triodes, dans les pays anglo-saxons). Grâce à une disposition coaxiale qui se prête bien à la réduction de la capacité, des distances entre électrodes de l'ordre du dixième de millimètre permettent à ces triodes d'atteindre des fréquences de 1 500 Mc/s avec un bon rendement et même 3 000 Mc/s. Le deuxième procédé pour réduire le temps de transit consiste à augmenter la vitesse des électrons à leur passage entre les électrodes. C'est ce qui est fait dans les *tubes à modulation de vitesse, ou klystrons.*

La figure 2 représente de façon schématique un de ces tubes ; on y voit quatre parties :

a) Un *espace d'accélération* Cg_1, dans lequel les électrons issus d'une cathode C sont accélérés jusqu'à atteindre en g_1 la vitesse v_0 correspondant à une certaine tension continue U_0 ;

b) Un *espace de modulation* entre les grilles g_1 et g'_1, où s'exerce le champ alternatif existant dans le résonateur de modulation R ; la tension alternative U_1 entre g_1 et g'_1 a pour effet de moduler le faisceau en vitesse ;

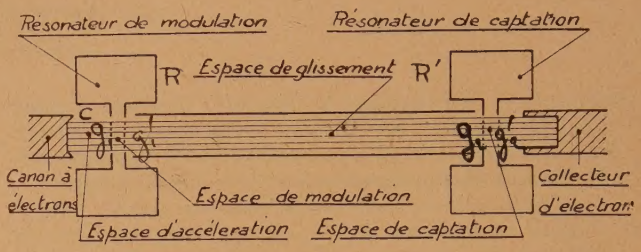

Fig. 2.

c) Un *espace de glissement* $g'_1\,g_2$, où ne règne aucun champ continu ; le faisceau y entre, modulé en vitesse, mais les électrons qui sortiront accélérés de l'espace de modulation tendront à rattraper ceux qui y ont été retardés : il se produira un phénomène de groupement ; finalement, à la sortie la modulation en vitesse s'est transformée en modulation en densité ;

d) Un *espace de captation* $g_2\,g'_2$, où le faisceau, modulé en densité, excite des oscillations dans le résonateur de captation R'.

Enfin le faisceau est recueilli dans un collecteur.

Pour le fonctionnement en amplificateur, le signal est envoyé dans R et le signal amplifié recueilli dans R' par des dispositifs de couplage appropriés.

Quoi qu'il en soit, l'importance du temps de transit dans les espaces de modulation et de captation où ont lieu les échanges énergétiques est moins grande que dans la triode, grâce à l'accélération préliminaire fournie aux électrons par la tension U_0. On peut dire aussi qu'on a séparé les fonctions de tensions U_0 et U_1 accélératrice et modulatrice.

Néammoins, pour plus faible qu'elle soit, l'influence nuisible des phénomènes de temps de transit n'a pas pour cela disparu.

Et une analyse simple conduit à des résultats de même nature que pour la triode. En particulier l'expression (1) subsiste, la constante B ayant simplement une valeur plus grande.

On peut dire qu'actuellement on sait réaliser sur une largeur de bande de quelques dizaines de mégacycles par seconde des gains en puissance de 10 au maximum.

Aussi l'annonce, il y a quelques mois [2][3][4][5], de la réalisation aux États-Unis d'Amérique d'un tube donnant un gain de 23 db sur une largeur de bande de 800 Mc/s a-t-elle fait vive impression

dans le monde, en laissant entrevoir de nouvelles possibilités d'amplification des ondes centimétriques.

Ce sont, avons-nous dit, les phénomènes de temps de transit qui limitent en définitive le facteur de mérite des triodes et des klystrons. On peut dire que, de ce point de vue, l'apparition de cet amplificateur marque une étape nouvelle dans la lutte contre les phénomènes de temps de transit.

Ceux-ci, nous l'avons vu, ne sont gênants que dans la mesure où chaque électron pendant son parcours voit changer la phase du champ électrique. Un moyen de supprimer cet effet est de mettre en présence une onde électromagnétique et un faisceau électronique se propageant approximativement à la même vitesse.

On supprime ainsi les effets de l'inertie des électrons et on rend possibles des échanges énergétiques cumulatifs, effectués sur un domaine spatial étendu. Cette dernière circonstance permet, en gardant un rendement global élevé, de mettre en œuvre des champs relativement peu intenses, c'est-à-dire d'utiliser des circuits à faible surtension, donc à bande large.

Cette idée de mettre en présence un faisceau et une onde de vitesses voisines n'est d'ailleurs pas nouvelle.

Dans un magnétron, sous l'action combinée d'un champ électrique et d'un champ magnétique, un nuage électronique tourne à vitesse constante entre la cathode et l'anode. On peut montrer qu'il existe deux ondes électromagnétiques susceptibles de tourner également dans cet espace : l'une dans un sens, l'autre dans l'autre. Si la vitesse du nuage devient égale à celle de l'une de ces ondes, il se produit un phénomène analogue à l'accrochage d'un moteur synchrone [6]. Le régime qui s'établit alors, éminemment favorable aux échanges d'énergie entre onde et électrons, procure au tube un rendement exceptionnellement élevé.

On peut dire alors que le *tube à onde progressive* [1] n'est en réalité qu'un magnétron, qu'on aurait « développé » de manière à isoler entrée et sortie et à pouvoir l'utiliser en amplificateur.

Gabor [7] avait d'ailleurs déjà signalé un mécanisme du même type, mettant en œuvre une amplification. Considérons une onde progressive présentant une composante de champ électrique suivant la direction de propagation.

Pour un observateur se déplaçant à la vitesse de l'onde, le champ électrique aura dans l'espace une distribution sinusoïdale. Si on superpose à cette onde un champ électrique continu E_0 constant dans l'espace, les points de champ total nul (fig. 3) seront des points tels que A, B, A′, B′. Ces points correspondront à des positions d'équilibre des électrons ; on peut montrer que A, A′ sont des positions d'équilibre stable ; B, B′ sont des positions d'équilibre instable. Les électrons tendront donc à se grouper autour des points A, A′, en des points où le champ alternatif est de freinage. L'énergie continue fournie par E_0 passera sous forme alternative par l'entremise des électrons.

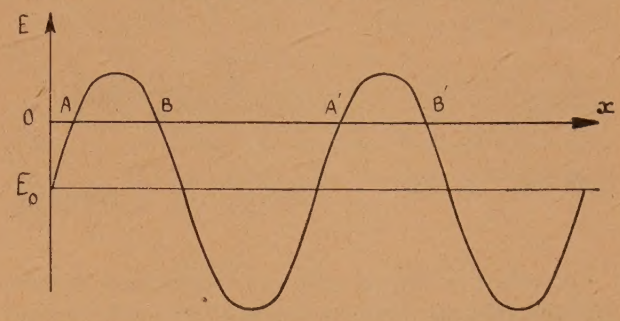

Fig. 3.

En pratique, on ne superpose pas de champ continu dans le tube, mais on envoie les électrons à une vitesse un peu supérieure à la vitesse de l'onde.

Pierce [5] a également cherché à donner une représentation imagée des phénomènes en assimilant les électrons à des billes roulant sur des collines de potentiel ou à un vent soulevant des ondes électromagnétiques.

Quoi qu'il en soit, un tube à onde progressive est essentiellement un dispositif dans lequel un faisceau électronique échange de l'énergie avec une onde se propageant à peu près à la même vitesse.

Or on sait que la vitesse d'un électron reste toujours inférieure à la vitesse c de la lumière ; pour des tensions accélératrices pas trop élevées, cette vitesse v_0 est donnée en milliers de kilomètres à la seconde par l'expression

$$v_0 = 0{,}6\sqrt{U_{\text{volt}}}.$$

Une tension de 2500 V communique ainsi une vitesse v_0 égale au dixième de la vitesse de la lumière.

Par contre la vitesse de propagation des ondes dans une ligne ordinaire est, en général, toujours égale ou supérieure à c.

On est donc conduit, pour construire un amplificateur à onde progressive, à utiliser une *ligne à retard* spécialement conçue pour que la vitesse de propagation des ondes y soit largement inférieure à la vitesse de la lumière.

Dans les réalisations actuellement connues, cette ligne à retard est constituée par une hélice conductrice suivant l'axe de laquelle passe le faisceau. La vitesse de propagation des ondes le long du fil de l'hélice est sensiblement égale à c. Avec un choix convenable du pas, la vitesse de propagation suivant l'axe de l'hélice peut être très inférieure à la vitesse de la lumière.

Par un dispositif de couplage approprié, l'énergie provenant d'un guide d'ondes G_1 (fig. 4) est envoyée sur l'hélice.

Le long de l'hélice, l'onde se trouve amplifiée par suite de l'interaction avec le faisceau. On recueille à

1. Ce terme est la traduction littérale du nom donné à ce tube par J. R. Pierce [5] et R. Kompfner [8]. Diverses autres traductions ont été proposées ; citons par exemple « tube à propagation d'ondes ».

la sortie, dans un guide G_2 une puissance supérieure à celle envoyée en G_1.

Indiquons pour terminer quelques valeurs constructives sur les tubes actuellement réalisés.

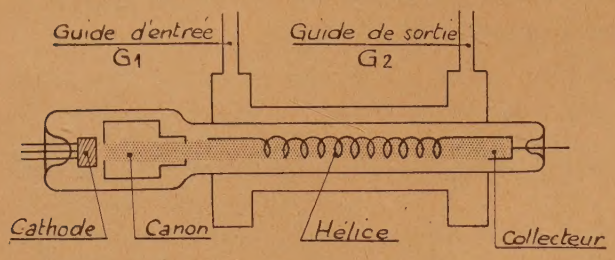

Fig. 4.

Ces tubes ne sont d'ailleurs actuellement connus que par quelques articles très brefs. Voici les caractéristiques d'un des tubes construits aux Bell Telephone Laboratories par J. R. Pierce et L. M. Field : le tube comporte une hélice en fil de molybdène de 30 cm de longueur. Le faisceau est accéléré sous 1 600 V avec un courant de 10 mA. On a une amplification de 200 en puissance sur une largeur de bande de 800 Mc. La puissance de sortie est de 200 mW ; la fréquence moyenne 4 000 Mc/s.

R. Kompfner [2] avait déjà en Grande-Bretagne réalisé un tube du même genre : l'hélice avait 60 cm de longueur et était en cuivre ; le faisceau accéléré sous 1 830 V transportait un courant de 110 μA. Le gain en puissance valait 6 ; la longueur d'onde de fonctionnement était de 9,1 cm.

L'étude développée ici a été faite au Centre National d'Études des Télécommunications.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr Louis de Broglie pour la bienveillance qu'il m'a témoignée et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

La première partie en a été poursuivie en collaboration avec Mr Blanc-Lapierre. Je le prie de trouver ici l'assurance de ma gratitude pour son aide et les conseils qu'il m'a prodigués. Mes remerciements vont enfin à Mr Goudet, Chef de la Division Tubes et Hyperfréquences du C. N. E. T. et à MMrs Voge et Wallauschek, qui ont bien voulu me faire part de leurs travaux sur le sujet traité.

Généralités

Nous nous proposons de faire une théorie du fonctionnement du tube amplificateur à onde progressive.

Nous montrerons d'abord que, dans certaines conditions, il peut y avoir transfert permanent d'énergie du faisceau à l'onde, avec production simultanée dans le faisceau d'une modulation en densité, croissant dans le sens de la propagation.

Nous discuterons ensuite les conditions favorables à l'obtention d'un maximum d'amplification.

Après avoir traité ce problème avec une grande généralité, nous aborderons des questions plus voisines des applications techniques. Nous étudierons en particulier le « risque d'accrochage » de cet amplificateur, c'est-à-dire le risque de le voir se transformer, par un effet de réaction interne, en auto-oscillateur. Nous porterons enfin notre attention sur le problème de la bande passante, dont nous avons déjà montré l'énorme importance pratique.

Avant d'aborder ces études, donnons quelques renseignements d'ordre général.

Il résulte de ce que nous avons dit jusqu'à présent qu'un tube à onde progressive comporte essentiellement une ligne à retard et un faisceau électronique, qui échangent entre eux de l'énergie.

Toute étude théorique complète devra donc comporter 3 parties :

a) étude des ondes dans la ligne ;

b) étude de la modulation du faisceau ;

c) raccord des deux études précédentes exprimant l'interaction ligne-faisceau.

A. Ligne. — Nous avons indiqué précédemment un modèle de ligne à retard : une hélice. Il va sans dire qu'il existe d'autres types de lignes à retard : lignes à cavités multiples (analogues à celles que l'on trouve sur la périphérie de certains magnétrons) [3], guides diélectriques à pouvoir inducteur spécifique élevé,...

Une ligne hélicoïdale se prête difficilement à une analyse rigoureuse. L'étude d'une ligne à cavités est déjà plus aisée. Enfin, on sait faire le calcul complet des diverses ondes susceptibles de se propager dans un guide diélectrique de forme géométrique simple.

1. *Hélice* : Un schéma simple, utilisé parfois pour représenter les propriétés d'une ligne en hélice, est celui d'une ligne à retard classique avec self-inductions et capacités réparties (fig. 5).

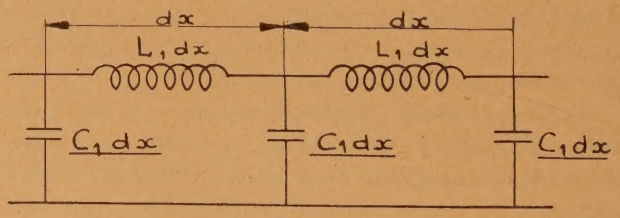

Fig. 5.

Mais ce schéma ne permet pas commodément un calcul satisfaisant des échanges d'énergie avec un faisceau. Il faut alors faire appel à une étude plus complète et plus compliquée [4].

2. C'est à lui également que nous avons emprunté les renseignements précédents relatifs au tube de Pierce [8].

3. Voir le paragraphe de l'introduction relatif aux magnétrons.

4. Dans le dernier numéro des *P. I. R. E.* [9] [10] [11] parvenu en France vers le 15 mars 1947, se trouve développée la théorie de J. R. Pierce. On y trouve en particulier en annexe un calcul sur l'hélice. On ne connaissait jusqu'à présent l'existence de cette théorie que par quelques conférences faites par son auteur aux États-Unis.

2. *Cavités multiples* : Pour préciser les conditions d'interaction entre le champ transmis par la ligne et le faisceau, nous avons légèrement complété le modèle de ligne à retard précédent, en introduisant une capacité série traversée par le faisceau électronique (fig. 6) [12] [13]. Ce modèle peut faire

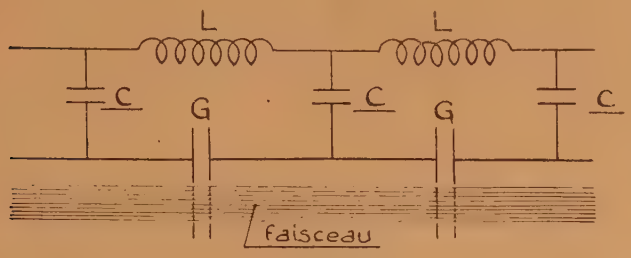

Fig. 6.

l'objet d'une étude avec constantes réparties, ou bien avec constantes localisées (ce sera alors l'étude d'une ligne à cavités multiples, couplées entre elles (fig. 7)).

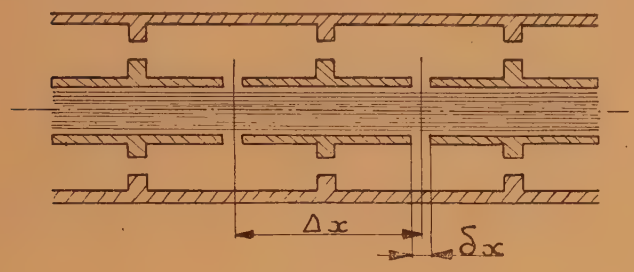

Fig. 7.

3. *Guide diélectrique* : Comme nous l'avons dit, on peut aussi utiliser, comme ligne à retard, un guide diélectrique. Les ondes qui s'y propagent sont entièrement connues et ce modèle se prête à une étude rigoureuse complète, comme on le verra plus loin ; on a, pour fixer les idées, considéré un guide circulaire percé d'un canal axial où circule le faisceau électronique (fig. 8).

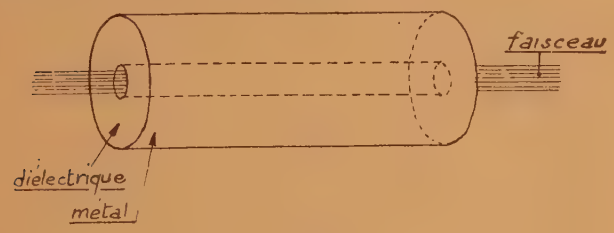

Fig. 8.

4. *Généralisation* : Enfin, nous serons amené par la suite à généraliser notre étude à une ligne à retard quelconque, dont la nature n'intervient plus que par des paramètres convenablement choisis.

Le principe de cette généralisation sera exposé plus loin. Nous pouvons cependant dire tout de suite qu'elle nous a permis de retrouver simplement les résultats obtenus sur les modèles plus particuliers énumérés précédemment.

B. Faisceau. — Il nous faut préciser avant toutes choses que les théories que nous allons exposer sont des théories de *petits signaux* ; et nous devons insister sur la signification que nous donnons à cette expression.

Nous supposons que, en l'absence de toute modulation, le faisceau a une vitesse $\vec{v}_0$ uniforme et une densité en volume τ_0 constante [5] dans toute sa partie utile. Nous reviendrons par la suite sur la possibilité de l'existence d'un tel faisceau et justifierons cette hypothèse.

Lorsque la modulation est introduite, à ces valeurs moyennes se superposent des composantes alternatives. Prenons dans le faisceau des coordonnées cylindriques r, φ x. Les composantes alternatives seront de la forme

$$\vec{v}\,(r,\varphi,x,t) \qquad \text{et} \qquad \tau(r,\varphi,x,t)\ ;$$

la théorie des petits signaux implique que les deux conditions

$$(2) \qquad |\vec{v}| \ll |\vec{v}_0|$$

$$(3) \qquad |\tau| \ll |\tau_0|$$

sont réalisées simultanément en tout point du faisceau.

Il n'est peut-être pas superflu d'attirer l'attention sur la différence qu'il y a entre ces hypothèses et celles qui sont faites dans l'étude du tube à modulation de vitesse. Dans cette dernière on fait essentiellement l'hypothèse (2), mais l'hypothèse (3) est loin d'être vérifiée, puisqu'on fait même en sorte que τ soit supérieur à τ_0 à la sortie de l'espace de glissement.

Nous verrons que la condition (3) n'est justifiée qu'à condition de n'envisager que de faibles puissances alternatives. L'intérêt des hypothèses (2) et (3) est le suivant : si les deux relations (1) et (2) sont vérifiées, il nous sera possible dans les équations où interviendront des termes du genre

$$\left[\vec{v}_0 + \vec{v}\right].[\tau_0 + \tau]$$

ou

$$\left|\vec{v}_0 + \vec{v}\right|^2$$

de négliger les termes du second ordre en $\vec{v}$ et τ.

Nous négligerons de même dans nos équations tous les termes alternatifs du second ordre. Nous aurons ainsi des équations purement linéaires. Comme en outre nous étudions des oscillations autour d'une solution continue indépendante de x dont nous supposons l'existence, ces équations seront linéaires et homogènes, à coefficients constants en x et t.

Désignons par z_j une des variables du système.

Nous chercherons une solution telle que toutes les variables s'expriment sous la forme :

$$(4) \qquad z_j = e^{j\omega t}.e^{j\alpha x}\ F_j(r,\varphi)$$

($F\,(r,\varphi)$ fonction de r et φ dont la forme dépend de ω et α).

5. Nous désignerons par τ_0 la valeur absolue de la densité de charge ; τ_0 sera ainsi positif, bien que les charges électroniques soient négatives. Par analogie, on désignera plus loin par τ des densités alternatives de charge changées de signe.

C'est ce que nous appellerons une *onde pure.*

On peut montrer que, pour des conditions aux limites déterminées, la solution du système s'exprime en général sous la forme d'une *somme d'ondes pures.*

On voit sur l'expression (4) que, dans une onde pure, et pour une position déterminée en r et φ, toutes *les variables sont proportionnelles entre elles*, quels que soient x et t.

Nous pourrons donc les exprimer toutes en fonction de l'une d'elles.

Si on se place au point de vue de la finesse apportée à l'analyse des phénomènes dans le faisceau, on doit distinguer deux stades :

1. *Étude unidimensionnelle* : Si le faisceau est étroit, on peut supposer que les variations radiales des diverses amplitudes z_j qui constituent une onde sont assez faibles pour qu'on puisse les négliger. Revenons à l'expression (4) : cela signifie que, dans le développement des fonctions $F(r, \varphi)$ au voisinage de $r=0$, on ne gardera que la partie principale.

En pratique, si l'on admet une symétrie de révolution, cela nous conduira à rechercher des solutions indépendantes de r et φ et des *phénomènes purement longitudinaux* (les composantes transversales s'annulent pour $r = 0$).

Au lieu de densités en volume τ_0 et τ, nous pourrons introduire des densités linéiques :

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho_0 = \pi r_0^2 \tau_0 \\ \rho = \pi r_0^2 \tau \end{cases}$$

(r_0, rayon du faisceau).

Finalement, l'étude d'une onde dans le faisceau se ramènera à l'étude des grandeurs E_x, v_x, ρ.

Pour cela, nous disposons tout d'abord des deux relations suivantes :

1) équation de la conservation de l'électricité

$$(6) \qquad \operatorname{div}[(\rho_0 + \rho)(v_0 + v_x)] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ;$$

2) équation de la dynamique

$$(7) \qquad m \frac{dv_x}{dt} = - eE_x$$

(e, m, charge et masse de l'électron).

A ces relations s'ajoute la condition aux limites sur la surface extérieure du faisceau, qui servira au raccord entre les études des phénomènes dans la ligne et le faisceau.

Compte tenu des hypothèses (2) et (3), ces équations (6) et (7) s'écrivent d'ailleurs :

$$(8) \qquad \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$(9) \qquad v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{e}{m} E_x$$

équations linéaires et homogènes à coefficients constants en x et t.

2. *Étude à 3 dimensions* : L'étude unidimensionnelle a l'avantage d'être simple et de permettre un calcul rapide. Mais elle n'exclut pas l'étude complète, qui seule est capable de donner des résultats généraux. En particulier, nous verrons que pour que les résultats de l'étude à 1 dimension soient valables, il faut non seulement que r_0 soit petit, mais encore que la densité électronique τ_0 ne soit pas trop élevée.

Afin d'avoir une vue tout à fait générale des phénomènes, nous entreprendrons donc l'étude à 3 dimensions de la propagation d'ondes dans le faisceau dans le cas général, avec une symétrie de répétition d'ordre n, et un champ magnétique focalisateur quelconque [6].

C. Raccord. — On peut envisager plusieurs méthodes pour raccorder les phénomènes dont la ligne est le siège à ceux qui se localisent dans le faisceau.

1) *Raccords de champs :* Ils consistent à utiliser sur la périphérie du faisceau les relations classiques de raccord entre les composantes des champs et des inductions :

a) On doit raccorder les composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques.

b) On doit raccorder les composantes normales de l'induction magnétique et du courant total. D'où 6 relations. Mais les deux dernières apparaissent comme une conséquence directe des deux premières et des équations de Maxwell :

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} H = 4\pi j_T.$$

Nous avons donc en général 4 équations homogènes de raccord (de champs tangentiels), d'où, puisque les solutions sont connues à une constante près, 3 relations.

Pourtant il peut arriver que, par suite de symétries particulières, certaines conditions soient remplies automatiquement, et que l'on ait à écrire effectivement moins de 4 relations. C'est en particulier le cas de l'étude unidimensionnelle du faisceau, où il ne subsiste qu'une seule relation de raccord entre E_x et H_φ.

Si nous remarquons que, d'après le théorème d'Ampère, le champ magnétique périphérique H_φ est proportionnel au courant dans le faisceau, cette relation pourra être une égalité d'impédance ou d'admittance :

$$(10) \qquad i = \rho_0 v_x + \rho v_0 = - \Gamma_1 E_x$$

(Γ_1, admittance linéique),

l'admittance Γ_1 devant avoir la même valeur calculée dans le faisceau et calculée dans la ligne.

On peut dire que la méthode de raccord est alors une méthode de *raccord d'impédance.*

Mais il nous faut bien remarquer qu'elle n'est applicable que grâce à la proportionnalité des amplitudes dans une onde déterminée, quels que soient

6. W. C. Hahn [14] a fait le calcul dans le cas d'une symétrie de révolution. Sa méthode, qui suppose connue à priori la forme des solutions, ne peut être généralisée à une symétrie d'ordre n.

x et t. Et cette propriété n'est obtenue qu'au prix des hypothèses (2) et (3) rendant les équations linéaires.

2. *Raccords énergétiques* : Des considérations énergétiques fournissent simplement une équation de raccord. L'énergie sortant du faisceau peut être calculée au moyen du flux du vecteur de Poynting à travers sa surface latérale. Cet apport d'énergie correspond à l'accroissement de l'énergie transportée par la ligne.

D'où une relation qui est d'ailleurs une conséquence directe du raccord des champs tangentiels.

Cependant l'introduction du flux d'énergie permet de donner un sens plus physique aux calculs. De toute façon, cette méthode ne fournit qu'une seule relation, ce qui est insuffisant pour traiter le problème général.

Ce procédé de raccord a été utilisé avec fruit par J. Voge [15].

Nous avons donc examiné successivement les trois parties qui doivent constituer toute théorie du tube à onde progressive. Nous avons, pour chaque partie, passé en revue les divers moyens de calcul qui s'offrent à nous.

Pour terminer ces généralités, nous allons dresser un tableau des différentes théories existant actuellement sur ce tube.

Étant donné le grand intérêt suscité par le tube à onde progressive et les nombreuses recherches qui sont certainement effectuées sur ce sujet, la suite des diverses théories réunies ici est probablement incomplète, et en tout cas n'a qu'une valeur très provisoire.

Cependant la classification proposée, résultant des considérations très générales qui précèdent, nous paraît fournir un cadre durable dans lequel toute théorie nouvelle pourra prendre sa place.

Rappelons la décomposition que nous avons adoptée :

A. LIGNE. — 1) Hélice.
2) Cavités multiples.
3) Diélectriques.
4) Généralisation.

B. FAISCEAU. — 1) Étude unidimensionnelle.
2) Étude à 3 dimensions.

C. RACCORD. — 1) Raccords de champs.
2) Raccords énergétiques.

A	*B*	*C*	
2	1	1	[12] [13]
3	1	1	[16]
4	1	1	[10]
3	2	1	[17]
4	2	2	[15]
4	2	1	[18] [19]

Le but de ce travail est de donner les résultats de trois théories qui correspondent à l'étude de divers modèles et à des degrés de généralité différents.

La première [12] [13], élaborée en collaboration avec Mr A. Blanc-Lapierre, est une théorie unidimensionnelle basée sur la considération d'un schéma de ligne. Elle permet d'expliquer un mécanisme d'amplification.

La deuxième [17] est une étude du modèle à guide diélectrique. C'est une étude à trois dimensions ; elle correspond par suite à une analyse plus fine des phénomènes.

Les méthodes employées dans cette étude sont susceptibles de généralisation et peuvent s'appliquer à une ligne à retard quelconque.

C'est ce qui est fait dans la troisième théorie [18] [19]. Par sa généralité, celle-ci contient toutes les autres ; aussi l'utilisons-nous pour discuter un certain nombre de problèmes plus pratiques, que pose la réalisation d'un amplificateur à onde progressive.

CHAPITRE I

ÉTUDE D'UN TUBE A CAVITÉS MULTIPLES

Modèle discontinu

Précisons tout d'abord le but que nous poursuivons dans ce chapitre. Nous voulons montrer qu'on peut envisager un dispositif comportant une ligne à retard et un faisceau, tels qu'il y ait amplification, c'est-à-dire passage d'énergie du faisceau à la ligne. Pour cette étude, nous attacherons une importance réduite aux ondes à amplitude constante (quitte à montrer ensuite comment la méthode d'étude aurait pu nous les donner) et nous nous intéresserons en premier chef aux ondes à amplitude croissante, qui expliquent l'amplification.

A. Ligne. — Nous utilisons, comme modèle de ligne à retard, une ligne artificielle classique, complétée par des condensateurs G placés en série. Cette ligne est représentée sur la figure 9, où sont précisées les notations :

L représente une self-induction,
C une capacité,
r une résistance.

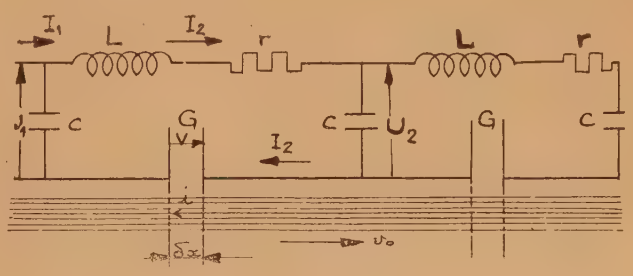

Fig. 9.

Les conventions de signe sont indiquées par des flèches.

Les données relatives à la ligne sont :

a) L, C, G, r : données purement électriques ;

b) δx : donnée géométrique, qui représente la distance entre les armatures des condensateurs G, c'est-à-dire la distance sur laquelle est localisée dans

chaque cellule l'interaction entre la ligne et le faisceau ;

c) Δx, qui représente la longueur géométrique d'une cellule (fig. 7). Δx a en quelque sorte deux significations : c'est un paramètre constructif, qui définit l'étalement donné à la ligne.

Mais les impédances définissent le déphasage par cellule, de sorte que se donner Δx, c'est définir la vitesse de propagation des ondes dans la ligne, en l'absence d'électrons.

Nous chercherons à réaliser la ligne de manière à avoir amplification. Pour cela nous nous donnerons à priori L, C G, r et δx et c'est en faisant varier Δx que nous allons chercher à atteindre le but proposé.

Ainsi que nous l'avons dit, c'est à l'intérieur des condensateurs G que se fera l'interaction avec le faisceau : les armatures de G sont munies de grilles, qui livrent passage aux électrons.

G sera ainsi le siège d'un courant de déplacement et d'un courant électronique. Il revient au même de dire que l'admittance de G sera la somme de son admittance capacitive propre, $G\omega$, et de l'admittance du faisceau, Γ, qui servira au raccord [7].

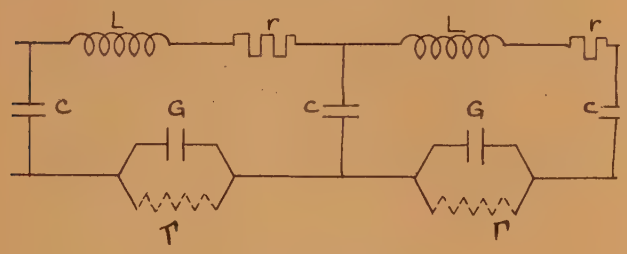

Fig. 10.

Nous sommes ainsi conduit au schéma de ligne représenté figure 10. Cependant, l'admittance Γ est une admittance fictive, qui n'a de sens qu'en tant que traduisant la présence du faisceau ; c'est pour cela que nous la représentons en pointillé sur la figure.

Or nous nous proposons d'étudier la propagation de ce que nous avons appelé une onde [8], c'est-à-dire un régime dans lequel une amplitude quelconque (U, I, V, ρ, v_x) prise dans la ligne ou dans le faisceau est multipliée, quand on passe d'une cellule à la suivante, par *le même facteur g*, que nous appellerons le *gain complexe par cellule.*

Nous utiliserons pour cela une méthode de représentation vectorielle. La figure 11 donne le diagramme des tensions et des courants dans deux cellules successives.

Désignant par $R + \mathbf{j}X$ l'impédance des éléments G et Γ en parallèle, on a d'après le diagramme :

$$\begin{cases} \arg \dfrac{U_1}{U_2} = 2\zeta \\ \arg\left[\omega L + X - \mathbf{j}(R + r)\right] = 2\xi. \end{cases}$$

Et si ξ est petit, c'est à-dire si

$$R + r \ll \omega L + X, \tag{11}$$

on a approximativement :

$$\begin{cases} 4 \sin^2\zeta = \omega C\left[\omega L + X\right], \\ \left|\dfrac{U_2}{U_1}\right| = 1 + 2\xi \operatorname{tg} \zeta. \end{cases}$$

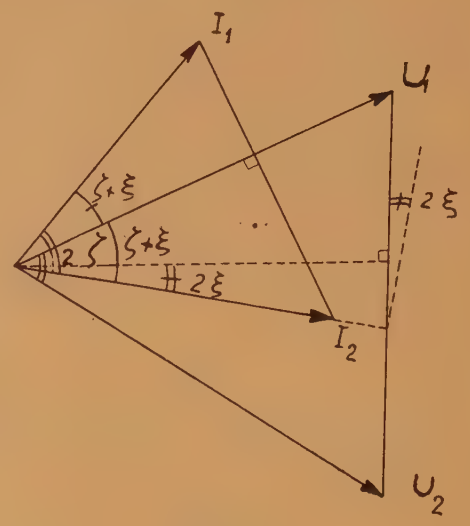

Fig. 11.

Finalement on dispose des 4 relations :

$$\begin{cases} \arg \dfrac{U_2}{U_1} = -2\zeta \\ \left|\dfrac{U_2}{U_1}\right| = 1 + 2\xi \operatorname{tg} \zeta \\ \sin \zeta = \omega \dfrac{\sqrt{L'C}}{2} \qquad (12) \\ 2\xi = -\dfrac{R + r}{\omega L'} \qquad (13) \end{cases}$$

où

$$L' = L + \frac{X}{\omega}.$$

Nous devons encore exprimer les relations reliant directement R et X à Γ :

$$\frac{1}{R + \mathbf{j}X} = \Gamma + \mathbf{j}\omega G.$$

Désignons par $|\Gamma|$ et ψ le module et l'argument de Γ ; on aura :

$$\begin{cases} R = \dfrac{|\Gamma| \cos \psi}{\omega^2 G^2 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma| \omega G \sin \psi}. \\ X = -\dfrac{1}{\omega G} - \dfrac{|\Gamma| \sin \psi}{\omega^2 G^2 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma| \omega G \sin \psi}. \end{cases}$$

Supposant alors :

$$|\Gamma| \leqslant \omega\, G, \tag{11'}$$

on aura :

$$R = \frac{|\Gamma| \cos \psi}{\omega^2 G^2}, \tag{14}$$

$$L' = \left(L - \frac{1}{\omega^2 G}\right) - \frac{|\Gamma| \sin \psi}{\omega^3 G^2}. \tag{15}$$

7. Voir paragraphe (C), Raccord n° 1, des Généralités.

8. La notion d'onde, définie paragraphe (B) des Généralités dans le cas d'équations différentielles en x, est ici généralisée au cas d'équations aux différences finies.

Enfin, c'est en fonction du gain g que nous nous sommes proposé de calculer les diverses amplitudes de l'onde. Il nous reste donc à écrire les équations reliant g aux diverses grandeurs introduites jusqu'ici.

Ce gain est par définition égal au quotient $\frac{U_2}{U_1}$. Nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{ll} (16) & |g| = 1 + 2\xi \operatorname{tg} \zeta, \\ (17) & \arg g = -2\zeta\,; \end{array}\right.$$

soit, en posant :

$$(18) \qquad |g| = e^{\gamma\Delta x}$$

et supposant $\gamma\Delta x \ll 1$:

$$(19) \qquad \gamma\Delta x = 2\xi \operatorname{tg} \zeta.$$

L'onde est ainsi définie par les relations (12) à (17). Il suffit d'éliminer ζ, ξ, R et L' entre les 6 relations pour obtenir deux équations donnant Γ et ψ en fonction de g.

Avant de passer à l'étude du faisceau, faisons encore une remarque d'ordre plus physique sur le calcul que nous venons d'exposer : il ressort des équations (10), (12) et (13) qu'on n'aura d'amplification que si R est une *résistance négative*, c'est-à-dire si

$$(20) \qquad \cos\psi < 0.$$

Si les électrons du faisceau présentent à la traversée de la capacité G des conditions de phase convenables, ils pourront faire apparaître dans la ligne une résistance négative, source d'amplification.

Sous une autre forme, on peut dire que ψ définit la phase relative du courant électronique et du champ électrique E_x développé par la ligne. Cette phase ψ règle alors le signe des échanges énergétiques entre la ligne et le faisceau. L'énergie passera du faisceau à la ligne si la relation (20) est vérifiée.

B. Faisceau. — Revenons à la figure 7. Nous y distinguons deux sortes de régions distinctes pour le faisceau : les régions où a lieu l'interaction avec la ligne, c'est-à-dire les condensateurs G (fig. 12)

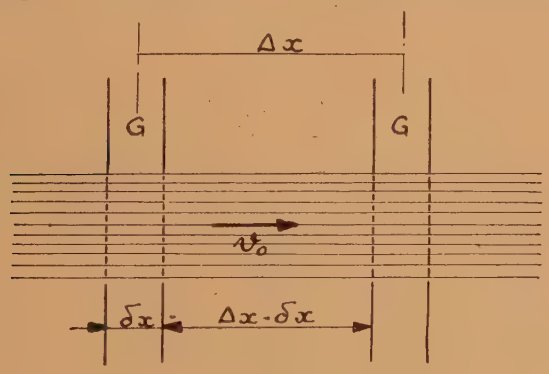

Fig. 12.

d'épaisseur δx ; les régions où le faisceau glisse entre deux des régions précédentes sur une longueur $\Delta x - \delta x$.

Rappelons que nous donnons δx à priori. C'est donc sur la longueur de l'espace de glissement que nous nous réservons de jouer tout à l'heure pour réaliser le gain optimum.

Nous nous bornons, avons-nous dit, à une étude unidimensionnelle du faisceau : c'est donc aux équations (8), (9) et (10) que nous aurons recours.

Entre deux condensateurs G, les équations (8) et (9) sans second membre s'intègrent aisément : remarquant que

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} = j\omega\varphi_x, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = j\omega\rho$$

puisqu'on cherche une solution de pulsation ω [9], on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} (21) & \varphi_x = (\varphi_x)_0\, e^{-\frac{j\omega}{v_0}x} \\ (22) & \rho = (\rho)_0\, e^{-\frac{j\omega}{v_0}x} + \rho_0 \frac{(\varphi_x)_0}{\varphi_0} \frac{j\omega}{\varphi_0} x\, e^{-\frac{j\omega}{v_0}x} \end{array}\right.$$

($(\varphi_x)_0$, $(\rho)_0$: constantes d'intégration).

Supposons que les grandeurs $(\rho)_0$ et $(\varphi_x)_0$ vérifient la relation

$$(23) \qquad \frac{|(\rho)_0|}{|\rho_0|} \gg \frac{|(\varphi_x)_0|}{|\varphi_0|}.$$

Puisque, nous le verrons plus tard, $\omega \frac{\Delta x - \delta x}{\varphi_0} \leqslant \frac{\pi}{2}$ nous pourrons, compte tenu de cette hypothèse (23), écrire :

$$\left\{\begin{array}{ll} (21) & \varphi_x = (\varphi_x)_0\, e^{-j\frac{\omega}{v_0}x}, \\ (22) & \rho = (\rho)_0\, e^{-j\frac{\omega}{v_0}x}. \end{array}\right.$$

Et dans le glissement qui a lieu entre deux condensateurs G, les deux éléments d'onde φ_x et ρ qui caractérisent la modulation du faisceau sont multipliés par

$$(24) \qquad g_1 = e^{-j\frac{\omega}{v_0}(\Delta x - \delta x)}.$$

A l'intérieur d'un condensateur G nous devrons appliquer les équations complètes (8), (9) et (10).

Introduisant la tension V entre les armatures de G (fig. 12), nous pourrons remplacer (10) par

$$(25) \qquad \rho_0\varphi_x + \rho\varphi_0 = \Gamma V$$

avec

$$(26) \qquad V = -E_x\delta x.$$

Et Γ est l'admittance du faisceau, que nous avons déjà introduite dans l'étude de la ligne et qui nous permettra d'opérer le raccord des deux études.

Supposons maintenant δx petit, ou, plus précisément

$$(27) \qquad \omega\delta x \leqslant \varphi_0.$$

On pourra alors considérer que E_x n'a pas le temps de varier au cours du passage d'un électron (temps de transit négligeable). Il en sera de même de ρ et

9. Voir paragraphe B (Généralités).

v_x, et on pourra intégrer (8) et (9) simplement sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_0 \delta v_x + v_0 \delta\rho = -\mathrm{j}\,\omega\rho\,\delta x & (28) \\ v_0 \delta v_x = \dfrac{e}{m} V - \mathrm{j}\,\omega v_x \delta x. & (29) \end{cases}$$

δv et $\delta\rho$ représentant les variations de v_x et ρ à la traversée de G.

Les 3 équations (25), (28) et (29) définissent entièrement la nature de l'onde à sa traversée de G. En particulier, par élimination de V, v_x et ρ entre ces 3 équations homogènes, nous obtenons la relation qui lie l'admittance Γ au gain g_2 à travers G :

$$(30) \qquad g_2 = 1 - \mathrm{j}\frac{\omega}{v_0}\,\delta x + \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{\Gamma}}\,\delta x.$$

Remarquant que $g_2 \# 1$, on a enfin la relation qui relie Γ au gain total $g = g_1 \times g_2$ par cellule :

$$(31) \qquad g = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{v_0}\Delta x}\left[1 + \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{\Gamma}}\,\delta x\right].$$

C. Raccord. — La méthode de raccord que nous avons exposée au début consiste à écrire que, pour une même onde, donc pour un même g, les Γ sont les mêmes dans la ligne et le faisceau.

Désignons par Γ_1 et Γ_2 les Γ calculés respectivement dans la ligne et dans le faisceau. On doit avoir :

$$(32) \qquad \Gamma_1(g) = \Gamma_2(g)$$

Cette relation fournit les valeurs de g possibles, et pour chacune d'elles, la valeur de $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$.

On peut aussi avoir directement les valeurs de Γ possibles en *raccordant les gains.*

On calculera, en fonction de l'impédance, le gain $g_1(\Gamma)$ dans la ligne, et le gain $g_2(\Gamma)$ dans le faisceau. Et on écrira :

$$(33) \qquad g = g_1(\Gamma) = g_2(\Gamma).$$

La relation (33) est équivalente à (32), mais sa forme mathématique n'est pas la même et les calculs s'y présentent mieux.

Quoi qu'il en soit, l'une ou l'autre des relations (32) ou (33) nous fournit les couples de valeurs g, Γ, compatibles avec une ligne donnée, c'est-à-dire avec une valeur de Δx fixée. A chacun de ces couples correspond un type d'ondes défini, pouvant exister pour la valeur Δx choisie.

Supposons donc en principe explicitées les fonctions $\Gamma(\Delta x)$ et $g(\Delta x)$. Nous pourrons étudier les variations de $|g|$ en fonction de Δx ; nous choisirons Δx de manière à rendre maximum le gain par cellule $|g|$. C'est dans ce sens que seront orientés nos calculs.

L'équation (33) est une relation entre grandeurs complexes. Écrivons l'égalité des modules et des arguments ; en remarquant que le deuxième terme du crochet figurant dans l'expression (31) de g est très petit devant l'unité, on a :

$$(33)_1 \quad |g| - 1 = \gamma\Delta x = -\left[\frac{|\Gamma|\cos\psi}{\omega^2 G^2} + r\right]\sqrt{\frac{C}{L'}}\,\frac{1}{\sqrt{4 - \omega^2 L'C}} = \text{p. réelle}\ \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{\Gamma}}\,\delta x$$

$$(33)_2 \quad -2\zeta = -\omega\frac{\Delta x}{v_0} + \text{p. imaginaire}\ \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{\Gamma}}\,\delta x$$

ou

$$(34) \quad |\Gamma|\left[\frac{|\Gamma|\cos\psi}{\omega^2 G^2} + r\right]^2 = \frac{\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{v_0^2}\,\delta x\,\frac{L'}{C}\,[4 - \omega^2 L'C]\,\frac{1 + \sin\psi}{2}$$

$$(35) \quad -2\zeta = -\omega\frac{\Delta x}{v_0} \pm \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\omega\rho_0 \frac{e}{m}}{|\Gamma|}}\,\delta x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$$

On voit que l'angle ψ s'introduit naturellement comme paramètre intermédiaire et on est amené, pour définir la fonction $\Gamma = \Gamma(\Delta x)$ à chercher une représentation paramétrique en ψ :

$$|\Gamma| = |\Gamma|(\psi) \qquad \Delta x = \Delta x(\psi).$$

D'ailleurs on a vu [10] que ψ réglait directement le sens des échanges entre la ligne et le faisceau, et cela rend bien naturel le fait que le gain s'exprime simplement en ψ. Or en éliminant $|\Gamma|$ entre (34) et $(33)_1$ nous obtenons en effet une expression de $|g|$ en fonction de ψ seul. Posons :

$$(36) \qquad A = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\,\frac{\rho_0 \frac{e}{m}}{\omega G^2 v_0^2}\,\delta x}\,\frac{1}{Z_c\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

Z_c : impédance caractéristique de la ligne,
ω_c : pulsation de coupure,

et pour simplifier négligeons l'amortissement propre r de la ligne.

Nous avons :

$$(37) \quad |g| - 1 = \gamma\,\Delta x = -\sqrt[3]{\frac{(1 + \sin\psi)\cos\psi}{2}}\,A,$$

expression qui nous permettra de discuter la variation du gain par cellule $\gamma\Delta x$ en fonction de ψ.

Dans notre représentation paramétrique en ψ à chaque valeur de ψ correspond une valeur de Δx, c'est-à-dire un étalement de la ligne. D'autre part à chaque valeur Δx correspond une vitesse de propagation propre de la ligne. Introduisons cette vitesse : nous désignerons par u_0 la vitesse propre de la ligne en l'absence d'électrons ; par v_0 la vitesse des électrons supposés non perturbés par les champs.

Si l'on tient compte de l'interaction, la vitesse

10. Voir chapitre I. (A).

de propagation de la phase d'une onde déterminée, correspondant à une valeur de ψ donnée, devient u, qui diffère en général de u_0 et de v_0.

Pour comparer u à u_0 et à v_0, nous poserons :

$$u = u_0 + \delta u_0 = v_0 + \delta v_0. \tag{38}$$

On a alors :

$$\begin{cases} 2\zeta = -\dfrac{\omega\Delta x}{v_0 + \delta v_0} = -\dfrac{\omega\Delta x}{u_0 + \delta u_0}, \\ 2\zeta(\rho_0) - 2\zeta(0) = -\dfrac{\omega\Delta x}{u_0 + \delta u_0} + \dfrac{\omega\Delta x}{u_0}. \end{cases}$$

D'où l'on tire en supposant

$$\frac{\delta v_0}{v_0} \quad \text{et} \quad \frac{\delta u_0}{u_0} \ll 1,$$

c'est-à-dire en même temps

$$\frac{u_0 - v_0}{u_0} \ll 1 :$$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta v_0}{v_0} = \dfrac{v_0\gamma}{\omega}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\psi}{2}\right), & (39)_1 \\ \dfrac{\delta u_0}{u_0} = \dfrac{v_0\gamma}{\omega}\,\mathrm{tg}\,\psi. & (39)_2 \end{cases}$$

Les relations (37) et (39) fournissent sous forme paramétrique en ψ tous les renseignements sur le gain par cellule $\gamma\Delta x$ et la vitesse des ondes u.

On pourra ainsi les utiliser pour étudier la variation de $|g|$ en fonction de Δx (c'est-à-dire de u_0), ou bien, si la ligne est fixée, la variation en fonction de la vitesse des électrons v_0.

Plus précisément, nous allons étudier comment varie le gain en fonction de la différence des vitesses :

$$\Delta v_0 = v_0 - u_0 = \delta u_0 - \delta v_0. \tag{40}$$

La relation (37) montre que $\gamma\Delta x$ est maximum pour

$$\psi = \frac{5\pi}{6} \tag{41}$$

On a alors :

$$\gamma_0\Delta x = A\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \Delta v_0 = 0. \tag{42}$$

On obtient le maximum de gain si on envoie le faisceau électronique exactement à la vitesse de propagation u_0 des ondes dans la ligne en l'absence d'électrons.

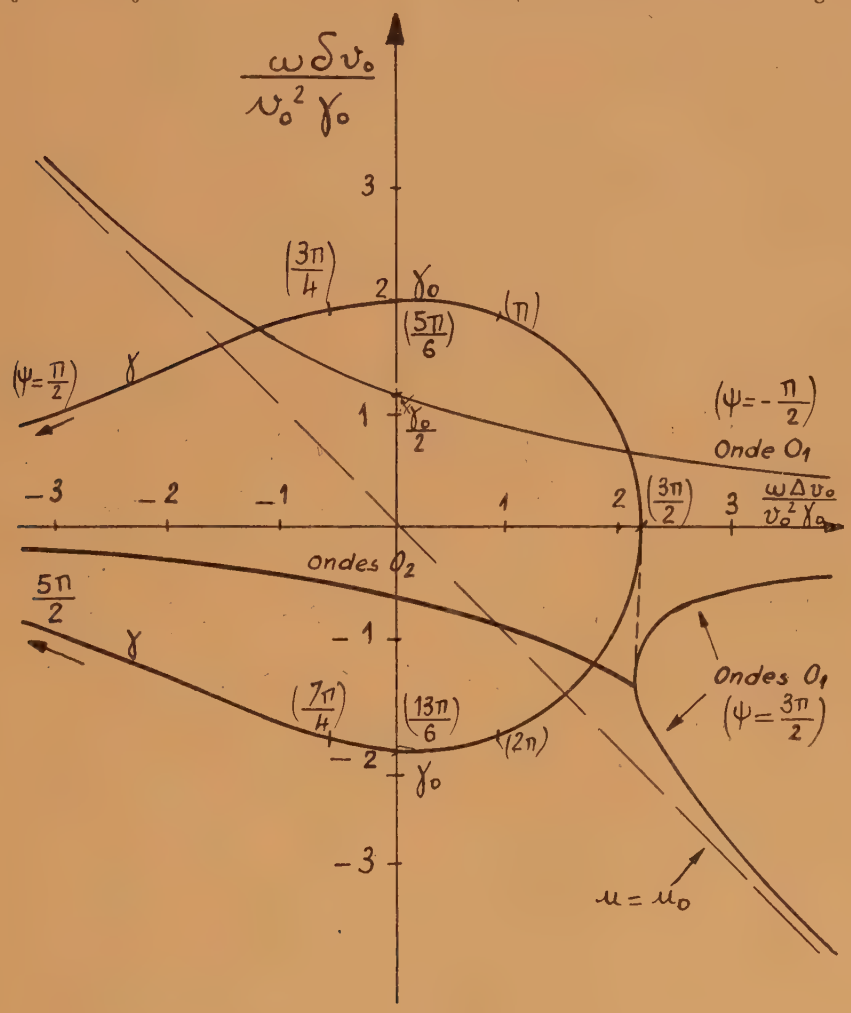

Fig. 13.

Nous avons représenté sur la figure 13 les variations de γ et de δv_0 en fonction de Δv_0.

Nous avons également ajouté sur la figure les vitesses des ondes sans gain. Ces ondes, comme nous l'avions dit, ont été laissées de côté dans cette étude. Pour elles en effet l'équation (33) devient une identité. Nous devons alors avoir recours à l'équation $(33)_2$ ou (35), avec $\psi = -\frac{\pi}{2}$, pour étudier

ces ondes. C'est ce que nous avons fait pour tracer la figure 13.

Rappelons que notre représentation paramétrique (39) n'est valable que pour des écarts de vitesse relatifs $\Delta v_0/v_0$ pas trop élevés. Les résultats indiqués sur la figure 13 sont alors valables non seulement pour une discussion des variations du gain γ et de la différence de vitesse δv_0 en fonction de la vitesse du faisceau v_0, mais également en fonction de la vitesse u_0 (c'est-à-dire en fonction de Δx, mais pour de faibles écarts relatifs).

Il ressort de l'examen de la figure 13 qu'il existe toujours 3 ondes : une onde sans gain (onde O_1) [11] de vitesse supérieure à v_0 et à u_0 ; cette onde existe pour Δv_0 quelconque. Si la vitesse du faisceau n'est pas trop supérieure à u_0,

$$\Delta v_0 < \sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}\,\frac{v_0^2\gamma_0}{\omega}, \tag{43}$$

il existe deux ondes de vitesses égales et légèrement inférieures à v_0 : l'une est amplifiée, l'autre atténuée (ondes O_2).

Si la vitesse du faisceau dépasse la valeur (43), le gain disparaît et on retrouve deux ondes O_1 de vitesse inférieure à v_0.

Valeurs numériques — Remarques.

Reprenons l'expression du gain maximum (42).

La ligne y intervient par son impédance caractéristique, par sa fréquence de coupure et par la capacité série G. Or G est inversement proportionnel à δx.

Posons :

$$G = G_0/\delta x.$$

Nous obtenons alors l'expression :

$$\gamma_0 = \frac{\delta x}{\Delta x}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{\rho_0\frac{e}{m}}{\omega G_0^2 v_0^2}\frac{1}{Z_c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}}. \tag{42'}$$

Or l'hypothèse (37) sur le temps de transit conduit à choisir δx petit. Si on veut que le gain ne soit pas trop faible, on devra donc prendre Δx également petit. Il y aurait même intérêt, pour augmenter γ_0, à rendre le quotient $\delta x/\Delta x$ aussi voisin de l'unité que possible, c'est-à-dire à augmenter dans le tube l'importance relative des espaces où il y a interaction entre la ligne et le faisceau. Cela conduit, entre autres, comme on peut le voir sur l'équation (35), à repousser la fréquence de coupure bien au-dessus de la fréquence d'utilisation.

D'autre part, en acceptant pour le quotient $\delta x/\Delta x$ une valeur bien inférieure à l'unité, une autre solution pour augmenter le gain consisterait à se rapprocher au contraire de la fréquence de coupure [12]. Mais cette deuxième solution donne un gain qui varie assez rapidement avec la fréquence, donc une largeur de bande plus faible. En particulier sur cette solution le produit gain × largeur de bande reste borné [13], comme dans une triode ou un tube à modulation de vitesse. Pourtant cette borne se trouve déjà largement repoussée et ce mode de fonctionnement pourrait être employé avec fruit.

Donnons pour terminer une application numérique sur cette expression du gain :

nous nous placerons au point de vue du faisceau dans les conditions réalisées par Pierce [14], c'est-à-dire :

$$\omega = 2{,}5.10^{10}\ \text{rad/sec}$$
$$v_c = 2{,}5.10^{2}\ \text{cm/sec}$$
$$\rho_0 = 1{,}2.10^{-2}\ \text{U. E. S.}$$

Nous prendrons pour la ligne :

$$Z_c = 90\,\omega = 10^{-10}\ \text{U. E. S.}$$
$$G_0 = 0{,}1\ \text{U. E. S.},$$

ce qui correspondrait à une surface voisine de 1 cm² et enfin : $\frac{\delta x}{\Delta x} = 0{,}5$. Nous nous supposerons bien au-dessous de la fréquence de coupure. Ces valeurs numériques nous donnent :

$$\gamma_0 = 0{,}12\ \text{néper/cm},$$

soit : 3,5 népers pour un tube de 30 cm, c'est-à-dire à peu près 30 db. Si on avait tenu compte de l'amortissement propre de la ligne, on aurait évidemment trouvé un gain plus faible, de l'ordre de 23 db, pour un amortissement de 25 db [15], et cette valeur est bien en accord avec les résultats expérimentaux de Pierce.

2° Modèle continu

On vient de voir sur l'étude précédente que, si on voulait augmenter le gain sans perdre sur la largeur de bande, on serait amené à repousser la fréquence de coupure vers l'infini. Nous sommes ainsi conduits à étudier une ligne continue à constantes réparties, cette étude apparaissant comme une limite de l'étude précédente lorsque les dimensions des cavités tendent vers 0 [16], leur nombre tendant vers l'infini.

Nous ne développerons pas ici l'étude complète de ce modèle [17]. Nous nous bornerons à en indiquer les résultats et à les comparer à ceux de l'étude précédente.

Nous désignerons (fig. 14) par C_1, L_1, L'_1, r_1, G_1 les constantes linéiques telles que

$$C = C_1\Delta x, \quad L = L_1\Delta x, \quad r = r_1\Delta x, \quad G = \frac{G_0}{\delta x} = \frac{G_1}{\Delta x}.$$

11. Nous désignerons par O_1 des ondes sans gain et par O_2 des ondes avec gain, que ce gain soit positif ou négatif.

12. Au voisinage de la fréquence de coupure $2\zeta \nless \pi/2$. L'hypothèse (27) conduit alors à un rapport $\delta x/\Delta x$ inférieur à 1. Voir également chapitre I, B), Faisceau.

13. Voir formule (1).

14. Voir fin de l'Introduction.

15. Il suffit d'avoir recours à l'équation (34) complète pour obtenir cette valeur.

16. Il faut remarquer que les valeurs numériques données dans le modèle précédent conduisaient déjà à des dimensions très faibles, de l'ordre de quelques millimètres.

17. Pour plus de détails, se reporter à un exposé fait en collaboration avec Mr Blanc-Lapierre, qui doit paraître dans un numéro à venir des *Annales des Télécommunications* [13].

et

$$L'_1 = L_1 - \frac{1}{G_1\omega^2}.$$

Nous ferons en outre, pour simplifier, $\Delta x = \delta x$, d'où $G_1 = G_0$.

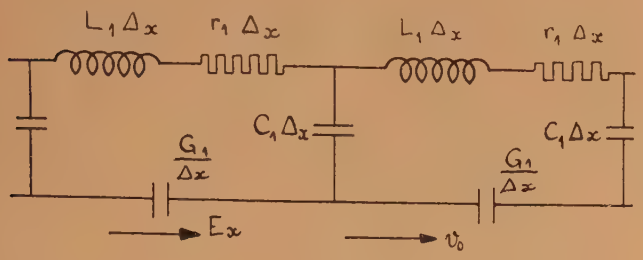

Fig. 14.

Si on cherche une onde [18] de la forme $z = Z\,e^{j(\omega t + \alpha x)}$ on trouve, en utilisant les relations (8) et (9) et les équations de circuits de la ligne, que les divers éléments de cette onde sont définis en fonction de l'un d'eux, U par exemple, par :

$$(44)\quad \begin{cases} I = -\dfrac{C_1\omega}{\alpha}U \\ E_x = \dfrac{\omega^2 L_1 C_1 - \alpha^2 - j\omega C_1 r_1}{j\alpha}U \\ v_x = \dfrac{e}{m}\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\omega^2 L_1 C_1 - \alpha^2 - j\omega C_1 r_1}{\theta}U \\ \rho = -\dfrac{e}{m}\rho_0\dfrac{\omega^2 L_1 C_1 - \alpha^2 - j\omega C_1 r_1}{\theta^2}U \end{cases}$$

avec

(45) $\theta = \omega + \alpha v_0$, α étant racine de l'équation

(46) $\rho_0[\omega^2 L_1 C_1 - \alpha^2 - j\omega C_1 r_1]$
$- G_1 \dfrac{m}{e}(\omega + \alpha v_0)^2[\omega^2 L'_1 C_1 - \alpha^2 - j\omega C_1 r_1] = 0.$

Cette équation montre qu'il peut exister quatre ondes :
pour des densités électroniques pas trop élevées, deux ont des vitesses voisines des vitesses de propagation $\pm u_0$ des ondes dans la ligne en l'absence de faisceau ; deux ont des vitesses voisines de v_0, vitesse du faisceau.
Ces résultats sont en accord avec l'étude précédente, qui nous avait montré en outre que le gain maximum était obtenu pour $u_0 = v_0$.

Nous allons donc réaliser cette condition et pour simplifier nos calculs nous négligerons r_1, comme dans l'étude précédente.

L'équation (46) met alors en évidence une onde de vitesse voisine de $-u_0$ et trois ondes de vitesse voisine de u_0. Pour celles-ci, en remarquant que α diffère peu de $-\omega/v_0$, donc que θ est petit, on peut simplifier l'équation et l'écrire sous la forme :

$$(47)\qquad \rho_0\frac{C_1}{G_1} - 2\frac{G_1\omega}{v_0^2}\frac{m}{e}\theta^3 = 0.$$

Nous retrouvons les trois ondes mises en évidence sur la figure 13.

18. Voir Généralités. B) Faisceau.

Posant :

$$(48)\qquad A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{\rho_0\frac{e}{m}}{\omega G_1^2 v_0}C_1},$$

il est facile de voir, en comparant à la formule (36), que

$$(48')\qquad A = A_1\delta x \quad \text{si} \quad \omega/\omega_c \leqslant 1.$$

(47) donne alors les 3 racines :

$$(47')\quad \begin{cases} \theta_1 = v_0 A_1, \\ \theta_2 = v_0 A_1\left[-\dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right], \\ \theta_3 = v_0 A_1\left[-\dfrac{1}{2} - j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]. \end{cases}$$

Séparant parties réelle et imaginaire de θ, on peut poser :

$$(49)\qquad \theta = \omega\frac{\delta v_0}{v_0} - j\gamma v_0,$$

γ et δv_0 ayant les définitions données dans l'étude précédente. Si on compare alors ces résultats à l'expression (42), on voit que les relations (47′), (48′) et (49) redonnent la valeur du gain maximum γ_0 si $\delta x = \Delta x$.

Études des ondes. — Donnons les expressions complètes des trois ondes : pour $v_0 = u_0$ les formules (44) deviennent :

$$(50)\quad \begin{cases} I \# Z_c U, \qquad E_x \# j\dfrac{C_1}{G_1}\dfrac{v_0}{\omega}U, \\ v_x \# -\dfrac{e}{m}\dfrac{C_1}{G_1}\dfrac{v_0}{\omega}\dfrac{U}{\theta}, \qquad \rho \# -\dfrac{e}{m}\rho_0\dfrac{C_1}{G_1}\dfrac{U}{\theta^2}. \end{cases}$$

Nous avons représenté sur la figure 15 les phases respectives de ces différents éléments pour les trois ondes (47′) ; rappelons que θ_1 correspond à une onde sans gain O_1, tandis que θ_2 et θ_3 correspondent à des ondes O_2, amorties pour θ_2 et amplifiées pour θ_3.

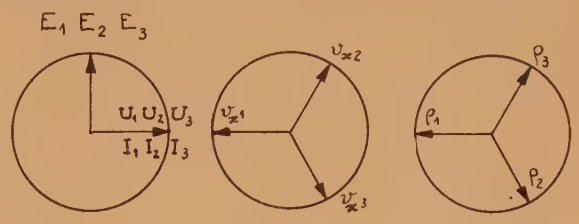

Fig. 15.

Sur la figure 16 on voit la distribution dans l'espace des grandeurs E_x, v_x et ρ associées à l'onde amplifiée.

On peut, à propos de cette figure, faire les remarques suivantes [19] : le champ électrique E_x accélère les électrons. Si la vitesse de l'onde était rigoureusement égale à la vitesse moyenne v_0 des électrons, v_x et E_x seraient toujours en opposition de phase. Mais les électrons vont légèrement plus vite que l'onde. Le champ E_x agit sur des électrons

19. Ces remarques ont un caractère purement indicatif et ne sauraient en aucune façon être considérées comme une démonstration.

qui un instant plus tard auront pris de l'avance sur lui. Par suite de l'inertie, v_x a donc un peu d'avance sur E_x. D'autre part les électrons ont tendance à se concentrer aux points de vitesse nulle, tels que A, A'. Pour la même raison que ci-dessus, les points de densité ρ maximum sont encore un peu en avance sur les points A et A'.

relations (44), permettraient de calculer les coefficients k_1, k_2 et k_3.

On voit facilement, en utilisant les équations simplifiées (50'), que ces 3 coefficients sont sensiblement égaux à 1 /3.

Pourtant cette valeur approchée ne permet pas une analyse correcte des phénomènes au voisinage

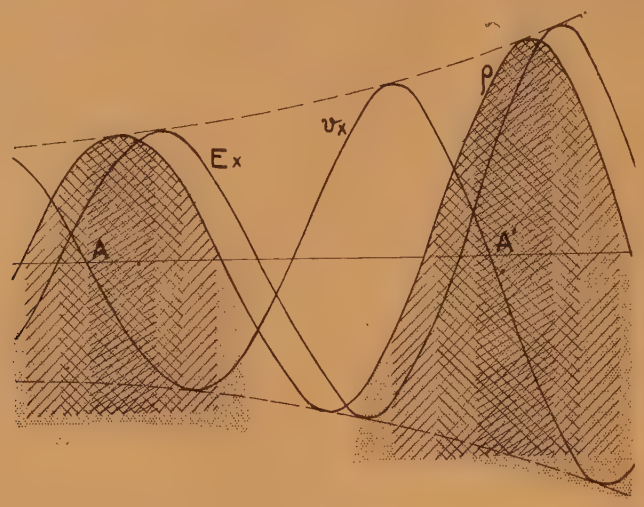

Fig. 16.

Ces deux avances permettent alors d'obtenir des maxima de densité électronique en des points où le champ électrique est de freinage.

Il y a plus d'électrons retardés qu'il n'y en a d'accélérés. L'énergie cinétique moyenne du faisceau passe sous forme d'énergie alternative dans la ligne extérieure [20] [21].

Modulation à l'entrée du tube. — Nous allons encore utiliser les résultats précédents pour examiner comment dans un tube de longueur finie les ondes précédentes peuvent se composer et donner un gain.

Dans un tel tube nous aurons par exemple comme conditions aux limites :

$$(51)\quad \begin{cases} U = U_0 \qquad \rho = 0 \qquad v_x = 0 & \text{pour } x = 0 : \text{entrée,} \\ \dfrac{U}{I} = Z_s & \text{pour } x = L : \text{sortie.} \end{cases}$$

Ces conditions aux limites seront satisfaites par une combinaison des quatre ondes dont nous avons montré la possibilité d'existence :

$$U = k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_4 U_4.$$

Si en particulier la ligne était prolongée indéfiniment ou, ce qui revient au même, si on avait $Z_s = Z_c$, l'onde de retour disparaîtrait et il n'y aurait en présence que les trois ondes (47).

Les 3 premières équations (51), compte tenu des

de l'entrée de l'amplificateur. Pour décrire la naissance de la modulation il sera plus simple d'avoir recours aux équations générales (8) et (9), que l'on résoudra sous la forme d'un développement en série de x.

Posons comme précédemment :

$$(10)\qquad i = \rho_0 v_x + \rho v_0.$$

On obtient aisément :

$$(52)\quad \begin{cases} v_x = -\dfrac{eE_0}{mv_0}x + \dots \\ i = -\mathrm{j}\omega\rho_0 \dfrac{eE_0}{2mv_0^2}x^2 + \dots \end{cases}$$

Les modulations en vitesse et densité croissent comme x, mais le courant électronique haute fréquence ne croît que comme le carré de x.

Lorsque x devient plus grand, évidemment, des trois ondes en présence seule celle qui est amplifiée reste prépondérante et à ce moment toutes les variables, y compris le courant i, croissent exponentiellement.

Il va sans dire que ces résultats que nous avons développés ici, tant sur la nature des ondes que sur la croissance de la modulation, sont valables pour tout modèle. Nous les avons exposés présentement, car nous possédions une forme analytique commode se prêtant bien à ces études. Mais nous pourrions les répéter pour tous les modèles que nous utiliserons par la suite.

Approximations faites. — Avant de quitter ce modèle, il nous reste à voir à quelles limitations nous conduisent les hypothèses générales (2) et (3) du fonctionnement en *petits signaux*, ainsi que l'hypothèse (23) sur la forme de la modulation.

20. On peut montrer à partir des équations (6) et (7) que si l'on sort de la théorie des petits signaux on a, en toute rigueur :

$$d\rho_0/dx = -1/2\, 1/v_0\, d(v^2)/dx.$$

21. Pour l'onde atténuée, par suite de la décroissance, l'avance prise par v_x, puis par ρ, est beaucoup plus importante et l'avance totale de ρ est supérieure à π, si bien que ρ_{max} se trouve dans une région de champ accélérateur.

Remarquons d'abord que la vérification de (3) et (23) entraînera automatiquement celle de (2). Or (23) s'écrit, compte tenu de (50) :

$$\frac{\theta}{\omega} \ll 1, \tag{23'}$$

d'où d'après (47) :

$$\rho_0 \frac{e}{m} \ll 2 \frac{G_1^2 Z_c}{\varphi_0} \omega^4; \tag{53}$$

condition [22] largement vérifiée avec les valeurs numériques précédentes, qui donnent 6.10^{15} au premier membre et 3.10^{20} au deuxième.

De son côté (3) s'écrit :

$$U \ll \frac{m}{e} \varphi_0 G_1 Z_c \theta^2, \tag{3'}$$

c'est-à-dire d'après (47) :

$$W = \frac{U^2}{Z_c} \ll \sqrt[3]{\frac{\rho_0^4 \left(\frac{m}{e}\right)^2 \varphi_0^{10}}{16 Z_c \omega^4 G_1^2}}, \tag{54}$$

ce qui donne, avec les valeurs numériques choisies :

$$W \ll 500 \text{ mW}.$$

Si on veut par exemple que $|\rho| \leqslant 0{,}2\ \rho_0$, on sera conduit à 20 mW comme puissance maximum. On voit donc que les 200 mW du tube de Pierce correspondent à une limite du fonctionnement en petits signaux, et que, sans doute, la distorsion s'y fait déjà sentir.

CHAPITRE II

ÉTUDE D'UN TUBE DIÉLECTRIQUE

Les études précédentes nous ont permis d'expliquer le mécanisme d'amplification. Pourtant à plusieurs points de vue ces études demandent à être complétées.

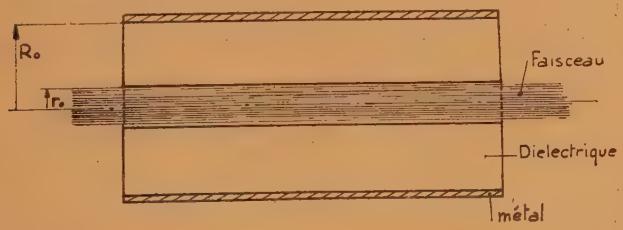

Fig. 17. — Ligne diélectrique.

D'une part nous avons supposé des vitesses u_0 et φ_0 pas trop différentes l'une de l'autre [23]. Cela pourrait nous avoir conduit à laisser échapper des modes de fontionnement intéressants intervenant pour $\varphi_0 \neq u_0$.

D'autre part nous avons fait une étude unidimensionnelle, qui néglige la description des phénomènes transversaux dont le faisceau est le siège.

Une étude précise plus complète s'impose donc. Nous allons la faire sur un modèle qui nous permettra une analyse rigoureuse et générale.

Ce modèle est essentiellement constitué par un guide cylindrique rempli d'une substance à constante diélectrique très élevée. Un étroit canal permet le passage du faisceau électronique (fig. 17) [24].

A. Ligne. — L'étude de la propagation des ondes dans un guide cylindrique est classique [20]. La présence du diélectrique ne complique pas la structure des équations. Nous nous bornerons à rappeler les résultats.

Pour donner un caractère très général à notre étude, nous ne supposerons pas que les phénomènes présentent une symétrie de révolution ; nous nous placerons dans le cas d'une symétrie *de répétition d'ordre* n [25].

Utilisons des coordonnées cylindriques r, φ, x. Les ondes se mettront sous la forme :

$$z = Z(r) e^{j(\omega t + \alpha x + n\varphi)}, \tag{55}$$

z représentant l'une quelconque des composantes de champ électrique ou magnétique.

Il y a deux types d'ondes susceptibles de se propager. Nous donnons ci-dessous les expressions analytiques des fonctions $Z(r)$ correspondant à chacune d'elles.

Posons :

$$t_1 = \frac{K\omega^2}{\alpha^2 c^2}. \tag{56}$$

$$h_1^2 = K\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 = -\alpha^2(1 - t_1), \tag{57}$$

$$\eta_1^2 = \alpha^2 - K\frac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2(1 - t_1). \tag{57'}$$

Ondes E ou TM (transverses magnétiques).

Elles sont caractérisées par la présence d'une composante électrique axiale et l'absence de composante magnétique axiale :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{(I)} & E_x = (E_x)_1[J_n(h_1 r) + \lambda_1 N_n(h_1 r)] \\
\text{(I')} & \text{ou [26]} \quad E_x = (E)_1[I_n(\eta_1 r) + \lambda_1 K_n(\eta_1 r)] \\
\text{(II)} & E_\varphi = \dfrac{1}{\alpha(1-t_1)} \dfrac{n}{r} E_x \\
\text{(III)} & E_r = -\dfrac{j}{\alpha(1-t_1)} \dfrac{\partial E_x}{\partial r} \\
\text{(IV)} & H_x = 0 \\
\text{(V)} & H_\varphi = j \dfrac{K\varepsilon\omega}{\alpha^2(1-t_1)} \dfrac{\partial E_x}{\partial r} \\
\text{(VI)} & H_r = \dfrac{K\varepsilon\omega}{\alpha^2(1-t_1)} \dfrac{n}{r} E_x
\end{array}\right. \tag{58}$$

22. L'hypothèse (11') sur l'importance respective du courant électronique par rapport au courant de déplacement dans G n'est en réalité pas différente de l'hypothèse (23). Si (53) est vérifiée, (11') le sera donc également.

23. Cette hypothèse était nécessaire à l'établissement des formules (39). Voir chapitre I, C) Raccord.

24. Rappelons, comme nous l'avons déjà signalé, que R. Wallauschek a également fait une étude de ce modèle. Nous retrouverons ses résultats [16] comme cas particulier de ceux très généraux que nous allons obtenir. Son étude est une théorie unidimensionnelle.

25. n n'est pas nécessairement entier.

26. La fonction K est non pas la fonction de Neumann, mais la fonction de Hankel d'argument imaginaire. Le λ figurant dans l'expression (I') n'est donc pas le même que celui

ε, μ : constante diélectrique et perméabilité magnétique absolues du vide.

K : constante diélectrique relative du milieu.

$(E_x)_1$, λ_1 : constantes arbitraires.

Ondes H ou TE (transverses électriques).

Caractérisées par la présence d'une composante magnétique axiale et l'absence de composante électrique axiale.

On a de même :

$$(59)\quad \begin{cases} \text{(I)} \quad H_x = (H_x)'_1[J_n(h_1 r) + \lambda'_1 N_n(h_1 r)] \\ \text{(I') ou } H_x = (H_x)'_1[I_n(\eta_1 r) + \lambda'_1 K_n(\eta_1 r)] \quad [26] \\ \text{(II)} \quad H_\varphi = \dfrac{1}{\alpha(1-t_1)}\dfrac{n}{r}H_x \\ \text{(III)} \quad H_r = -j\dfrac{1}{\alpha(1-t_1)}\dfrac{\partial H_x}{\partial r} \\ \text{(IV)} \quad E_x = 0 \\ \text{(V)} \quad E_\varphi = -j\dfrac{\mu\omega}{\alpha^2(1-t_1)}\dfrac{\partial H_x}{\partial r} \\ \text{(VI)} \quad E_r = -\dfrac{\mu\omega}{\alpha^2(1-t_1)}\dfrac{n}{r}H_x \end{cases}$$

Chaque onde dépend de deux paramètres λ_1 ou λ'_1 et $(E_x)_1$ ou $(H_x)'_1$ [27] en fonction desquels il est possible d'exprimer toutes les composantes des champs.

Comme il y a deux sortes d'ondes, E et H, nous disposons en définitive de 4 paramètres pour définir une onde complète de constante de propagation α [28].

B. Faisceau. — Avant d'entreprendre l'étude des ondes dans le faisceau, revenons encore sur l'hypothèse fondamentale que nous avons déjà formulée dans notre exposé des Généralités :

Nous avons supposé qu'en l'absence de champ alternatif les électrons pouvaient se déplacer dans le faisceau avec une vitesse *purement axiale* v_0 et une densité en volume τ_0 *uniformes.*

Or il est bien évident que cette hypothèse ne saurait être vérifiée en toute rigueur, puisque les effets de charge d'espace tendent à faire diverger le faisceau.

Un premier artifice pour justifier cette hypothèse est le suivant : on imagine que l'on envoie avec les électrons des ions positifs avec une densité et une vitesse telles que la densité moyenne totale et le courant moyen total soient nuls. Dans un langage plus concret, on détruit l'effet de charge d'espace moyen par des ions [29]. Du point de vue pratique cette solution n'est guère satisfaisante. Nous allons montrer en outre que, dans le cas présent, elle est presque superflue.

Au lieu de réaliser la focalisation par des ions dont la densité sera difficilement rendue uniforme, on peut utiliser un champ magnétique constant dirigé suivant l'axe du faisceau. C'est d'ailleurs là un procédé couramment employé dans la technique pour stabiliser un faisceau électronique ; et l'on sait même qu'il est effectivement utilisé dans les tubes à onde progressive réalisés à ce jour.

Nous allons étudier de façon rigoureuse la propagation des ondes en présence de ce champ magnétique focalisateur. Pour chaque grandeur nous distinguerons la composante continue $z_0(r, \varphi, x)$ qui représente la valeur moyenne au point r, φ, x et la composante variable dans le temps $z(r, \varphi, x, t)$.

Dans une solution rigoureuse, les composantes continues de la vitesse et de la densité ne peuvent pas prendre simultanément des valeurs constantes uniformes $\vec{v_0}$ et τ_0 ; elles en diffèreront par des termes correctifs fonction de r, φ, x. Nous montrerons que, pour des valeurs convenables du champ focalisateur, ces termes correctifs sont négligeables.

Cela légitime le fait d'être parti de valeurs $\vec{v_0}$ et τ_0 constantes.

A cause de la linéarité des équations, on peut étudier à part la solution continue correspondant à un régime indépendant du temps, et ensuite la solution en régime variable, dans laquelle aux composantes continues se superposent de petites composantes alternatives.

Régime continu. — La solution doit satisfaire aux équations de l'électro-magnétisme et à l'équation de la dynamique :

$$(60)\qquad \operatorname{div} E_0 = -\frac{4\pi\tau_0}{\varepsilon}$$

$$(61)\qquad \operatorname{div} H_0 = 0$$

$$(62)\qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, H_0 = -4\pi\tau_0 \vec{v_0}$$

$$(63)\qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, E_0 = 0$$

$$(64)\qquad \frac{d\vec{v_0}}{dt} = -\frac{e}{m}\left[\vec{E_0} + \mu\vec{v_0} \wedge \vec{H_0}\right]$$

Nous chercherons une solution à vitesse constante et telle que $\dfrac{\partial}{\partial x} = 0$.

On supposera en outre que

$$\begin{cases} \tau_0 = C^{te}, \\ v_{x_0} = v_0 = C^{te}, \end{cases}$$

en tout point du faisceau.

Nous devrons enfin avoir une solution qui ne présente pas de discontinuité sur l'axe.

On obtient alors aisément :

$$\begin{cases} E_{\varphi_0} = 0, \\ v_{r_0} = 0, \\ H_{r_0} = 0, \\ E_{x_0} = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad \frac{d}{dt} = 0.$$

figurant dans (I). Nous avons pourtant gardé ces expressions, car ce sont les fonctions N et K qui figurent dans les tables.

27. La forme de notre solution en φ donne une onde tournant dans un certain sens. Si nous voulons un phénomène stationnaire en φ, il faut lui ajouter une onde égale tournant en sens contraire (— n). C'est par exemple à cette onde stationnaire en φ que s'applique le résultat que nous venons d'énoncer. Dans le cas général il y aurait lieu de composer dans un rapport quelconque les ondes + n et — n et on disposerait ainsi d'un paramètre supplémentaire.

28. Voir Généralités, B) Faisceau, ce que nous entendons par l'expression onde.

29. Cette hypothèse est faite par W. C. Hahn [14] dans une étude analogue et par D. L. Webster [21] dans l'étude du tube à modulation de vitesse.

Il reste les 4 équations :

$$(60') \qquad \frac{E_{r_0}}{r} + \frac{\partial E_{r_0}}{\partial r} = -\frac{4\pi\tau_0}{\varepsilon},$$

$$(62') \qquad \begin{cases} \text{(I)} & -\dfrac{\partial H_{x_0}}{\partial r} = -4\pi\tau_0 v_{\varphi_0}, \\ \text{(II)} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi_0}) = -4\pi\tau_0 v_{x_0}, \end{cases}$$

$$(64') \qquad E_{r_0} + \mu v_{\varphi_0} H_{x_0} - \mu v_{x_0} H_{\varphi_0} = 0.$$

(60′) et (62′)II permettent de calculer facilement E_{r_0} et H_{φ_0}.

Éliminant v_{φ_0} entre les deux autres équations, on calcule alors H_{x_0}, puis v_{φ_0}.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

$$(65) \qquad \begin{cases} E_{x_0} = 0, \\ E_{\varphi_0} = 0, \\ E_{r_0} = -\dfrac{2\pi\tau_0}{\varepsilon} r, \\ H_{\varphi_0} = -2\pi\tau_0 v_0 r. \\ H_{r_0} = 0, \\ H^2_{x_0} = H_0^2 + 8\pi^2\tau_0^2(c^2 - v_0^2)r^2, \\ v_{x_0} = v_0, \\ v_{\varphi_0} = -\dfrac{2\pi\tau_0}{H_{x_0}}(c^2 - v_0^2)r, \\ v_{r_0} = 0, \\ \tau_0 = \tau_0. \end{cases}$$

Nous mettons ainsi en évidence l'existence d'un régime continu pour lequel la vitesse axiale v_{x_0} et la densité τ_0 sont constantes dans tout le faisceau. Mais ce régime n'est possible que moyennant la présence d'un champ électrique radial E_{r_0} et d'un champ magnétique dont les deux composantes H_{φ_0} et H_{x_0} doivent varier à l'intérieur d'une section droite. Enfin et surtout la vitesse des électrons n'est pas purement axiale, mais légèrement hélicoïdale.

Si le champ magnétique sur l'axe est assez grand, les résultats se simplifient. Supposons :

$$(66) \qquad H_0 \gg 2\pi\tau_0 c r_0 = \frac{2\rho_0 c}{r_0}$$

(inférieur à 1 gauss pour les densités usuelles).

On a sensiblement :

$$(65') \qquad \begin{cases} H_{x_0} = H_0, \\ v_{\varphi_0} = 0, \\ E_{r_0} = -\dfrac{2\pi\tau_0 r}{\varepsilon}. \\ H_{\varphi_0} = -2\pi\tau_0 v_0 r. \end{cases}$$

Le champ magnétique longitudinal a alors une valeur constante. Le faisceau se déplace avec une vitesse purement axiale et une densité uniformes. Il faudra simplement tenir compte du champ électrique radial E_{r_0} et du champ magnétique transversal H_{φ_0}. E_{r_0} est le champ électrique créé par les charges électroniques. H_{φ_0} est le champ magnétique produit par le courant électronique. Nous verrons que leur influence est négligeable.

Régime variable. — Abordons maintenant l'étude du régime variable. Aux composantes continues se superposent des composantes alternatives.

Comme nous l'avons déjà dit, nous ferons ici une étude de *petits signaux*, c'est-à-dire que nous négligerons tous les termes alternatifs du deuxième ordre et rendrons ainsi les équations linéaires. Il résulte de ce que nous avons dit à propos de la définition d'une onde [30] que nous pourrons chercher des solutions de la forme :

$$(55) \qquad z = Z(r)e^{j(\omega t + \alpha x + n\varphi)},$$

comme on l'a fait dans le diélectrique.

Portons alors ces expressions dans les équations de Maxwell et l'équation de la dynamique. Compte tenu des équations (60) à (64) et négligeant les termes du deuxième ordre (petits signaux), on obtient [31] :

$$(67) \qquad \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + jn\frac{E_\varphi}{r} + j\alpha E_x = -\frac{4\pi\tau}{\varepsilon}.$$

$$(68) \qquad \begin{cases} \text{I} & jn\dfrac{H_x}{r} - j\alpha H_\varphi = \varepsilon j\omega E_r - 4\pi\tau_0 v_r \\ \text{II} & j\alpha H_r - \dfrac{\partial H_x}{\partial r} = \varepsilon j\omega E_\varphi - 4\pi\tau_0 v_\varphi \\ \text{III} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - jn\dfrac{H_r}{r} = \varepsilon j\omega E_x - 4\pi\tau_0 v_x \\ & \qquad - 4\pi\tau v_0 \end{cases}$$

$$(69) \qquad \begin{cases} \text{I} & jn\dfrac{E_x}{r} - j\alpha E_\varphi = -\mu j\omega H_r \\ \text{II} & j\alpha E_r - \dfrac{\partial E_x}{\partial r} = -\mu j\omega H_\varphi \\ \text{III} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - jn\dfrac{E_r}{r} = -\mu j\omega H_x \end{cases}$$

$$(70) \qquad \begin{cases} \text{I} & j\theta v_r = -\dfrac{e}{m}[E_r + \mu v_\varphi H_0 - \mu v_0 H_\varphi \\ & \qquad + \mu v_{\varphi_0} H_x - \mu v_x H_{\varphi_0}] \\ \text{II} & j\theta v_\varphi = -\dfrac{e}{m}[E_\varphi + \mu v_0 H_r - \mu v_r H_0] \\ \text{III} & j\theta v_x = -\dfrac{e}{m}[E_x + \mu v_r H_{\varphi_0} - \mu v_{\varphi_0} H_r] \end{cases}$$

$$(45) \qquad \text{avec} \qquad \theta = \omega + \alpha v_0.$$

Ces équations forment un système linéaire et homogène à dix inconnues. Hahn [9] a résolu ce système dans le cas d'une symétrie de révolution (n = 0) de la façon suivante :

Il admet à priori que les solutions ont la même forme que les ondes dans un diélectrique [32] en complétant de façon analogue pour les v et τ, et il substitue ces expressions dans les équations et en déduit l'argument des fonctions de Bessel et les coefficients de proportionnalité entre champs, vitesses et densité.

Cette méthode ne s'applique pas au cas d'une

30. Voir Généralités, B) Faisceau.

31. L'équation div $H = 0$ apparaît comme une conséquence des autres. Ici en effet :
rot $E = -j\mu\omega H$, qui entraîne l'équation précédente.

32. Voir les équations (58) et (59).

symétrie d'ordre n, que nous nous proposons de résoudre.

En outre, cette méthode n'est pas entièrement satisfaisante : on constate qu'une solution de forme imposée vérifie bien les équations générales, mais on n'a pas ainsi la certitude d'avoir obtenu *toutes* les ondes.

Aussi allons-nous procéder différemment, en utilisant une méthode plus longue sans doute, mais plus sûre et valable pour n quelconque : nous allons effectuer l'*intégration générale* du système.

Disons encore que nous commencerons par faire notre calcul avec

$$H_{\varphi_0} = \rho_{\varphi_0} = 0$$

et que nous vérifierons sur les solutions que l'erreur ainsi commise est négligeable.

Pour résoudre le système (67) à (70), nous allons calculer toutes les variables en fonction d'une seule : E_x. Nous aurons ainsi neuf relations et il restera une équation inutilisée, qui pourra alors se mettre sous la forme d'une équation différentielle en E_x seul.

En résolvant cette équation et en portant l'expression de E_x dans les relations précédentes, nous aurons entièrement intégré le système.

Pratiquement, cherchons à obtenir tout d'abord l'équation en E_x et, pour cela, éliminons toutes les autres variables entre les dix équations.

Éliminons τ, ρ_x, ρ_φ et ρ_r entre les équations (67), (68) et (70) ; nous obtenons les trois équations :

$$(71)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \mathrm{j}n\frac{H_r}{r} = \mathrm{j}\left(\varepsilon\theta - \frac{4\pi\tau_0}{\theta}\frac{e}{m}\right)E_x + \varepsilon\rho_0\left(\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \mathrm{j}n\frac{E_\varphi}{r}\right).$$

$$(72)\quad \begin{aligned} &\text{(I)}\quad \left(\varepsilon\theta\omega - 4\pi\tau_0\frac{e}{m}\right)E_r - \mathrm{j}\frac{\omega H_0}{c^2}\frac{e}{m}E_\varphi \\ &= -\left(4\pi\tau_0\frac{e}{m}\mu\rho_0 + \alpha\theta\right)H_\varphi - \mathrm{j}\alpha\mu\frac{e}{m}H_0H_r \\ &\qquad + \theta n\frac{H_x}{r} + \mu\frac{e}{m}H_0\frac{\partial H_x}{\partial r}. \\ &\text{(II)}\quad \left(\varepsilon\theta\omega - 4\pi\tau_0\frac{e}{m}\right)E_\varphi + \mathrm{j}\frac{\omega H_0}{c}\frac{e}{m}E_r \\ &= \left(4\pi\tau_0\frac{e}{m}\mu\rho_0 + \alpha\theta\right)H_r - \mathrm{j}\alpha\mu\frac{e}{m}H_0H_\varphi \\ &\qquad + \mathrm{j}\mu\frac{e}{m}H_0 n\frac{H_x}{r} + \mathrm{j}\theta\frac{\partial H_x}{\partial r}. \end{aligned}$$

Il est commode d'introduire un certain nombre de coefficients sans dimensions, qui simplifieront l'écriture des équations :

$$(73)\quad \begin{cases} s = 4\pi\tau_0\dfrac{e}{m}\mu\dfrac{c^2}{\theta^2}, \\ s_1 = 4\pi\tau_0\dfrac{e}{m}\mu\dfrac{1}{\alpha^2}, \\ s'_1 = -s_1\dfrac{\alpha\rho_0}{\theta}, \\ t = \dfrac{\omega^2}{\alpha^2c^2}, \\ t' = -\dfrac{\omega\rho_0}{\alpha c^2}, \\ t'' = t - s_1, \\ q^2 = \mu^2\left(\dfrac{e}{m}\right)^2 H_0{}^2 \cdot \dfrac{1}{\theta^2}. \end{cases}$$

L'élimination de H_x, H_φ et H_r entre les équations (69), (71) et (72) donne alors :

$$(71')\quad \left[\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]\left[(1-t')\alpha E_r + \mathrm{j}\frac{\partial E_x}{\partial r}\right] + \mathrm{j}\left[\frac{\omega\theta}{c^2}(1-s) - \frac{n^2}{r^2}\right]E_x + \mathrm{j}\alpha(1-t')n\frac{E_\varphi}{r} = 0.$$

$$(74\text{-I})\quad \alpha^2(1-t'')E_\varphi + \mathrm{j}\alpha^2q(1-t)E_r - \alpha q\frac{\partial E_x}{\partial r} - \alpha(1-s'_1)n\frac{E_x}{r} + \mathrm{j}\left[q\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]\left[n\frac{E_r}{r} + \mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}\right] = 0.$$

$$(74\text{-II})\quad \alpha^2(1-t'')E_r - \mathrm{j}\alpha^2q(1-t)E_\varphi + \mathrm{j}\alpha q\frac{n}{r}E_x + \mathrm{j}\alpha(1-s'_1)\frac{\partial E_x}{\partial r} + \left[\frac{n}{r} + q\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[n\frac{E_r}{r} + \mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}\right] = 0.$$

Il reste à éliminer E_r et E_φ entre les trois équations (71′) et (74). Pour cela nous réalisons des combinaisons symétriques des trois équations et de leurs dérivées, de façon à abaisser l'ordre de ces équations en E_r et E_φ. On arrive ainsi aux trois nouvelles équations :

$$(75)\quad \begin{aligned} &-\frac{1-q^2}{1-t}t\frac{\theta}{\omega}\frac{1-t''-s(1-t')^2-q^2(1-t)}{1-t'}F'_n(E_x) \\ &\quad + \alpha^2s_1s'_1q^2\frac{\partial E_x}{\partial r} \\ &\quad + \alpha^2(1-q^2)t\frac{\theta}{\omega}(1-s)\frac{1-t''-q^2(1-t)}{1-t'}\frac{\partial E_x}{\partial r} \\ &\quad + \alpha^2s_1q(1-s_1'-q^2)\frac{n}{r}E_x + \mathrm{j}\alpha^3s_1{}^2q^2E_r \\ &\quad + \alpha^3s_1q\,[1-t''-q^2(1-t)]\,E_\varphi = 0. \end{aligned}$$

$$(76)\quad \begin{aligned} &-\frac{1-q^2}{1-t}t\frac{\theta}{\omega}\frac{1-t''-s(1-t')^2-q^2(s-t)}{1-t'}\times \\ &\quad \left[\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]F_n(E_x) + \\ &\quad [\alpha^2s_1s_1'q^2 + \alpha^2s_1q(1-s_1'-q^2)]\left[\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]E_x + \\ &\quad \alpha^2(1-q^2)t\frac{\theta}{\omega}(1-s)\frac{1-t''-q^2(1-t)}{1-t'}\left[\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]E_x \\ &\quad + \{\alpha^3s_1{}^2q^2 + \alpha^3s_1q[1-t''-q^2(1-t)]\}[E_\varphi + \mathrm{j}E_r] \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

$$(77)\quad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{1-t}t\frac{\theta}{\omega}\frac{1-t''-s(1-t')^2-q^2(1-t)}{1-t'} + \frac{s_1q}{1-t'}\right]\times \\ &\quad F_n(E_x) \\ &\alpha^2t\frac{\theta}{\omega}\left[(1-s)\frac{1-t''-q^2(1-t)}{1-t'} - s_1q\frac{1-s}{1-t'}\right]E_x \\ &\quad + \alpha s_1q\left[\frac{1-n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right][E_\varphi + \mathrm{j}E_r] = 0. \end{aligned}$$

où on a posé :

$$(78)\quad F_n(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}z.$$

On peut remarquer que :

$$(78')\quad \left[\frac{1-n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]\left[\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right] - \frac{n^2}{r^2} = F_n$$

et, tenant compte des relations (73), on obtient enfin l'équation cherchée :

$$(79)\quad \begin{aligned}&[1-t''-s(1-t')^2-q^2(1-t)]F_n[F_n(E_x)]\\ &-\alpha^2\{(1-t)(1-s)[1-t''-q^2(1-t)]\\ &+(1-t'')^2-q^2(1-t)^2-s(1-t'')(1-t')^2\}F_n(E_x)\\ &+\alpha^4(1-t)(1-s)[(1-t'')^2-q^2(1-t)^2]E_x=0.\end{aligned}$$

C'est une équation du quatrième ordre, dont la solution s'exprimera sous forme d'une somme de quatre intégrales indépendantes.

Or, cherchons une solution de la forme :

$$E_x=(E_x)\,J_n(h_2r).$$

Elle vérifiera l'équation (79) si

$$(80)\quad \begin{aligned}&[1-t''-s(1-t')^2-q^2(1-t)]h_2^4\\ &+\alpha^2\{(1-t)(1-s)[1-t''-q^2(1-t)]\\ &+(1-t'')^2-q^2(1-t)^2-s(1-t'')(1-t')^2\}h_2^2\\ &+\alpha^4(1-t)(1-s)[(1-t'')^2-q^2(1-t)^2]=0.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $\pm h_2$ et $\pm h'_2$ les quatre racines de cette équation, la solution générale de (79) sera :

$$(81)\quad \begin{aligned}E_x=(E_x)_2[J_n(h_2r)+\lambda^2N_n(h_2r)]\\ +(E_x)'_2[J_n(h_2'r)+\lambda_2'N_n(h_2'r)],\end{aligned}$$

ou, en posant

$$(80')\quad \eta_2=\mathbf{j}h_2,\qquad \eta_2'=\mathbf{j}h_2':$$

$$(81')\quad \begin{aligned}E_x=(E_x)_2[I_n(\eta_2r)+\lambda_2K_n(\eta_2r)]\\ +(E_x)'_2[I_n(\eta_2'r)+\lambda_2'K_n(\eta_2'r)].\end{aligned}$$ [26]

L'équation (80) ne se résout simplement, on le verra plus loin, que si $q=0$ ou $q=\infty$. Pourtant si on suppose que

$$(23')\qquad \theta\ll\omega$$

et que la densité est telle que $s_1\ll 1$, ce qui correspond pratiquement à toutes les densités usuelles,

$$t'\,\#\,t''\,\#\,t,$$

l'équation (80) devient :

$$(80'')\quad \begin{aligned}&[1-q^2-s(1-t)]h_2^4\\ &+\alpha^2\{(1-s)(1-t)(1-q^2)+\\ &(1-t)[1-q^2-s(1-t)]\}h_2^2\\ &+\alpha^4(1-t)^2(1-s)(1-q^2)=0,\end{aligned}$$

d'où :

$$(82)\quad \frac{h_2^2}{\alpha^2}=-\frac{(1-t)(1-s)(1-q^2)}{1-q^2-s(1-t)},$$

$$\frac{h'^2_2}{\alpha^2}=-(1-t).$$

A partir de la solution (81) il est possible d'exprimer toutes les composantes de l'onde :

De (75) et (76) qui sont linéaires et d'ordre 0 en E_r et E_φ, on calculera aisément ces deux dernières composantes du champ électrique.

Portant dans (69), on en déduira les composantes H_x, H_φ et H_r.

Puis par $(68)_{I,\ II}$ et $(70)_{III}$ on calculera ρ_x, ρ_φ et ρ_r.

Enfin (67) donnera τ. Le problème est donc entièrement résolu.

Pourtant dans le cas général les expressions correspondantes sont compliquées et peu maniables ; en particulier toutes les composantes sauf ρ_x et H_x se présenteront comme une somme de fonctions

$$\frac{J_n}{r}\quad\text{et}\quad J'_n$$

dans des proportions variables.

Nous allons donner les résultats complets dans deux cas particuliers :

1° $n=0$. — Chaque onde complète correspondant à un α déterminé se décompose en deux parties caractérisées chacune par une valeur de $|h_2|$.

On a pour l'une d'elles :

$$(83)\quad \begin{aligned}&E_x=(E_x)_2[J_0(h_2r)+\lambda_2N_0(h_2r_0)]\\ &\text{ou}\quad E_x=(E_x)_2[I_0(\eta_2r)+\lambda_2K_0(\eta_2r)],\quad (26),\\ &E_r=-\mathbf{j}\frac{1}{\alpha}\frac{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}-t\dfrac{\theta}{\omega}(1-s)}{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}(1-t')}\frac{\partial E_x}{\partial r},\\ &H_\varphi=\mathbf{j}\frac{1}{\mu\omega}t'\frac{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}+\dfrac{\theta}{\alpha\rho_0}(1-s)}{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}(1-t')}\frac{\partial E_x}{\partial r},\\ &\rho_x=\mathbf{j}\frac{e}{m\theta}E_x,\\ &\rho_r=\frac{\theta\varepsilon}{4\pi\tau_0\alpha}\frac{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}+(1-t')(1-s)}{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}(1-t')}\frac{\partial E_x}{\partial r},\\ &\tau=\mathbf{j}\frac{\alpha\varepsilon}{4\pi}\frac{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}+1-t\left(1-s\dfrac{\theta}{\omega}\right)}{1-t'}E_x.\end{aligned}$$

$$(84)\quad \begin{aligned}&H_x=-\mathbf{j}\frac{\alpha}{\mu\theta}\frac{h_2^2}{\alpha^2}qs_1(1-t')E_x\times\\ &\frac{1}{\dfrac{h_2^2}{\alpha^2}[q^2(1-t)-(1-t'')]+[q^2(1-t)^2-(1-t'')^2]}\\ &E_\varphi=\mathbf{j}\frac{\mu\omega}{h_2^2}\frac{\partial H_x}{\partial r},\\ &H_r=\mathbf{j}\frac{\alpha}{h_2^2}\frac{\partial H_x}{\partial r},\\ &\rho_\varphi=-\frac{\alpha^2}{h_2^2}\left[\frac{h_2^2}{\alpha^2}+1-t\right]\frac{\partial H_x}{\partial r}.\end{aligned}$$

On voit apparaître sur les expressions (83) et (84) des ondes E et H. La première des équations (84) est une équation de couplage entre ces deux sortes d'ondes, qui sont ici inséparables.

2° *Pour* n *quelconque.* — Le couplage disparaît dans deux cas :

$q=0$, c'est-à-dire $H_0=0$;

$q\ \infty$, c'est-à-dire H_0 très grand.

Nous allons donner la solution générale du système (67) à (70) dans le cas d'un champ magnétique focalisateur très grand :

$$(85)\qquad H_0\gg\frac{\theta}{\mu\dfrac{e}{m}}.$$

L'équation (80) prend alors la forme simple

$$(80''') \quad h_2^4 + \alpha^2[(1-t)(1-s) + (1-t)^2]\, h_2^2 + \alpha^4(1-t)^2(1-s) = 0,$$

qui se résout aisément

$$(86)_0 \quad \begin{cases} \dfrac{h_2^2}{\alpha^2} = -(1-t)(1-s) \\ \text{ou} \quad \dfrac{\eta_2^2}{\alpha^2} = (1-t)(1-s)\,; \end{cases}$$

$$(87)_0 \quad \begin{cases} \dfrac{h'^2_2}{\alpha^2} = -(1-t), \\ \text{ou} \quad \dfrac{\eta'^2_2}{\alpha^2} = 1-t. \end{cases}$$

Et on a comme dans le diélectrique [33] :

Ondes E

$$(86) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad E_x = (E_x)_2[J_n(h_2 r) + \lambda_2 N_n(h_2 r)] \\ \text{ou (I')} \quad E_x = (E_x)_2[I_n(\eta_2 r) + \lambda_2 K_n(\eta_2 r)] \quad [26], \\ \text{(II)} \quad E_\varphi = \dfrac{1}{\alpha(1-t)}\dfrac{n}{r}E_x, \\ \text{(III)} \quad E_r = -\dfrac{j}{\alpha(1-t)}\dfrac{\partial E_x}{\partial r}, \\ \text{(IV)} \quad H_x = 0, \\ \text{(V)} \quad H_\varphi = j\dfrac{\varepsilon\omega}{\alpha^2(1-t)}\dfrac{\partial E_x}{\partial r}, \\ \text{(VI)} \quad H_r = \dfrac{\varepsilon\omega}{\alpha^2(1-t)}\dfrac{n}{r}E_x, \\ \text{(VII)} \quad v_x = j\dfrac{e}{m}\dfrac{1}{\theta}E_x, \\ \text{(VIII)} \quad v_\varphi = 0, \\ \text{(IX)} \quad v_r = 0, \\ \text{(X)} \quad \tau = j\alpha\dfrac{\varepsilon s}{4\pi}E_x. \end{cases}$$

Ondes H

$$(87) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad H_x = (H_x)'_2[J_n(h'_2 r) + \lambda'_2 N_n(h'_2 r)] \\ \text{ou (I')} \quad H_x = (H_x)'_2[I_n(\eta'_2 r) + \lambda'_2 K_n(\eta'_2 r)] \quad [26] \\ \text{(II)} \quad H_\varphi = \dfrac{1}{\alpha(1-t)}\dfrac{n}{r}H_x, \\ \text{(III)} \quad H_r = -j\dfrac{1}{\alpha(1-t)}\dfrac{\partial H_x}{\partial r}, \\ \text{(IV)} \quad E_x = 0. \\ \text{(V)} \quad E_\varphi = -j\dfrac{\mu\omega}{\alpha^2(1-t)}\dfrac{\partial H_x}{\partial r}, \\ \text{(VI)} \quad E_r = -\dfrac{\mu\omega}{\alpha^2(1-t)}\dfrac{n}{r}H_x, \\ \text{(VII)} \quad v_x = 0. \\ \text{(VIII)} \quad v_\varphi = 0. \\ \text{(IX)} \quad v_r = 0. \\ \text{(X)} \quad \tau = 0. \end{cases}$$

Une onde complète dans le faisceau sera la superposition dans une proportion quelconque d'ondes du type E et du type H ; chacune de ces ondes dépendant de 2 paramètres, l'onde complète dépendra, comme dans le diélectrique, de 4 paramètres. C'est d'ailleurs là une conséquence de l'ordre de l'équation différentielle (79).

Solutions relativistes. — Les solutions que nous venons de calculer ne sont pas relativistes.

Pour obtenir des solutions relativistes, il nous faudrait remplacer dans les formules (70) m par

$$(88) \quad \frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad \text{dans } (70)_{\text{III}}$$

et par

$$\frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad \text{dans } (70)_{\text{I, II}}$$

Cela revient pratiquement à modifier légèrement les coefficients$s$.

D'une façon plus précise, les formules (83) à (87) restent valables à condition d'y prendre, pour s, le s calculé à partir de (88).

Et l'équation (80) est remplacée par [34]

$$(89) \quad (1-s-q^2)h_2^4 + \alpha^2\{(1-s)[1-t''-q^2(1-t)] + (1-s)(1-t'') - q^2(1-t)\}h_2^2 + \alpha^4(1-s)[(1-t'')^2 - q^2(1-t)^2] = 0.$$

L'hypothèse $t' \# t'' \# t$ conduit de même à :

$$(90) \quad \begin{cases} \dfrac{h_2^2}{\alpha^2} = -\dfrac{(1-t)(1-q^2)}{1-q^2-s}, \\ \dfrac{h_2'^2}{\alpha^2} = -(1-t)\,; \end{cases}$$

ou, si

$$s \ll 1 :$$

$$(90') \quad \frac{h_2^2}{\alpha^2} = -(1-t)\left[1 - \frac{q^2}{q^2-1}s\right].$$

On pourrait employer cette expression si à l'occasion on voulait étudier un mode de fonctionnement avec champ magnétique faible. Mais en pratique la correction relativiste ne modifie pas sensiblement les résultats.

Remarques. — Examinons, avant de poursuivre l'étude, la forme des ondes obtenues.

Supposons la condition (85) vérifiée, et portons notre attention sur les expressions (86) et (87).

Il apparaît que les ondes H se propagent exactement comme si le faisceau n'existait pas. En particulier elles ne modulent aucunement ce dernier.

Par contre les ondes E sont affectées par la présence du faisceau. Et elles y créent une modulation en densité et en vitesse ; mais les vitesses des électrons restent toujours purement longitudinales.

Admettant à priori ce dernier résultat, il eût été possible, à partir des équations (67) à (70) alors simplifiées, de retrouver les expressions (86) et (87). Mais rien ne justifiait ce calcul.

Il nous reste à revenir sur l'hypothèse que nous avons faite en négligeant les termes continus H_{φ_0} et v_{φ_0} dans notre calcul.

33. Si dans ces relations on fait tendre τ_0, c'est-à-dire s vers 0, on retrouve les équations (58) et (59) écrites dans le diélectrique où l'on aurait fait $K = 1$. Pour retrouver exactement les expressions avec $K \neq 1$, il suffirait d'ailleurs de remplacer dans les formules (86) et (87), où l'on a fait $s = 0$, ε par $K\varepsilon$ et c^2 par c^2/K.

34. Les formules (83), (84) et (89) peuvent alors être comparées aux expressions obtenues par Hahn [14].

Il y aurait lieu de rajouter au 2e membre de l'équation $(70)_{III}$ les termes en

$$(70)_{III} \qquad v_r H_{\varphi_0} - v_{\varphi_0} H_r.$$

Ces deux termes contiendront le quotient $\frac{\tau_0}{H_0}$. Et pour des valeurs de H_0 satisfaisant à (66) ils seront négligeables.

Nous avons aussi négligé deux termes au 2e membre de $(70)_I$:

$$v_{\varphi_0} H_x - v_x H_{\varphi_0}.$$

Pour les ondes du type H, ces termes sont également exprimés en fonction du rapport $\frac{\tau_0}{H_0}$ et sont négligeables.

Mais pour les ondes du type E, si le terme $v_{\varphi_0} H_x$ peut bien être négligé, cela n'est pas aussi simple pour le terme $v_x H_\varphi$.

Ce terme sera négligeable devant le terme E_r si

$$(91) \qquad \frac{h_2 r}{2} \frac{s_1}{1-s} \ll 1.$$

Cette condition, sauf dans le cas où $s \# 1$, est toujours vérifiée si

$$(92) \qquad \sigma = \rho_0 \frac{e}{m} \mu \qquad \ll \frac{c^2}{v_0^2}, \quad (35)$$

condition très largement réalisée en pratique.

En résumé, à part le cas où $s \# 1$ qui, nous le verrons, ne correspond pas à un type d'ondes intéressant ni même souvent susceptible d'exister, notre hypothèse de départ, qui supposait l'existence d'un faisceau à vitesse axiale $\vec{v}_0$ et densité τ_0 homogène, est entièrement justifiée.

Il suffira de focaliser le faisceau par un champ magnétique assez intense, c'est-à-dire vérifiant (66) et (85), pour réaliser un système représentant avec une très bonne approximation notre modèle et possédant en particulier toutes les propriétés que nous allons maintenant étudier.

C. Raccord. — Nous sommes en possession, par les expressions (58), (59) et (86), (87), de la forme des ondes dans un diélectrique, et dans le faisceau.

Comme nous l'avions exposé dans les Généralités [36], il ne nous reste plus qu'à raccorder ces ondes par des conditions aux limites convenables pour trouver une équation en α qui définira la suite discrète des ondes susceptibles de se propager dans le système.

Reportons-nous à la figure 17. Le système est constitué d'un diélectrique métallisé sur sa surface extérieure.

Faisons pour commencer l'hypothèse que le métal est parfaitement conducteur (nous verrons plus loin comment la présence d'une résistivité non nulle modifie les résultats).

Dans ces conditions, le *champ électrique* doit être *normal.*

Le diélectrique est percé d'un canal où circule le faisceau.

En toute rigueur, il y a un espace entre le diélectrique et le faisceau, mais nous pourrons en première approximation le négliger, quittes à montrer ensuite comment on pourrait en tenir compte.

Il nous faudra donc, à la surface de séparation ($r = r_0$), raccorder [36] les composantes tangentielles des champs.

Enfin le faisceau contient l'axe du tube et physiquement cet axe ne devra pas être le siège de singularités de champs. Cela nous conduit à choisir des ondes dont les éléments restent finis pour $r = 0$.

On voit que ces conditions s'expriment par 8 relations linéaires et homogènes. Or les ondes complètes dans le faisceau et le diélectrique dépendent chacune de 4 paramètres *homogènes.* Pour que les conditions aux limites puissent être vérifiées avec des ondes à amplitudes non nulles, une condition de compatibilité doit être satisfaite. C'est l'équation aux α.

Exprimons ces conditions aux limites.

Condition en $r = 0$. — Cette condition impose

$$(93) \qquad \lambda_2 = \lambda'_2 = 0.$$

Condition en $r = R_0$. — D'après (58) et (59) elles s'écrivent :

$$(94) \qquad J_n(h_1 R_0) + \lambda_1 N_n(h_1 R_0) = 0,$$

$$(95) \qquad J_n'(h_1 R_0) + \lambda_1' N_n'(h_1 R_0) = 0.$$

Conditions en $r = r_0$. *Coefficient E.* — Compte tenu des relations (93), ces 4 conditions s'écrivent :

$$(96) \quad (E_x)_1[J_n(h_1 r_0) + \lambda_1 N_n(h_1 r_0)] = (E_x)_2 J_n(h_2 r_0)$$

(raccord des composantes E_x) ;

$$(97) \quad \frac{1}{1-Kt}\frac{n}{r}(E_x)_1[J_n(h_1 r_0) + \lambda_1 N_n(h_1 r_0)]$$
$$- j\frac{\mu\omega}{\alpha(1-Kt)} h_1 (H_x)'_1[J'_n(h_1 r_0) + \lambda'_1 N'_n(h_1 r_0)]$$
$$= \frac{1}{1-t}\frac{n}{r}(E_x)_2 J_n(h_2 r_0) - j\frac{\mu\omega}{\alpha(1-t)} h'_2 (H_x)'_2 J_n(h'_2 r_0)$$

(raccord des composantes E_φ) ;

$$(98) \quad (H_x)'_1[J_n(h_1 r_0) + \lambda'_1 N_n(h_1 r_0)] = (H_x)'_2 J_n(h'_2 r_0)$$

(raccord des composantes H_x) ;

$$(99) \quad j\frac{K\varepsilon\omega}{1-Kt} h_1 (E_x)_1[J'_n(h_1 r_0) + \lambda_1 N'_n(h_1 r_0)]$$
$$+ \frac{1}{1-Kt}\frac{n}{r}(H_x)'_1[J_n(h_1 r_0) + \lambda'_1 N_n(h_1 r_0)]$$
$$= j\frac{\varepsilon\omega}{1-t} h_2 (E_x)_2 J'_n(h_2 r_0) + \frac{1}{1-t}\frac{n}{r}(H_x)'_2 J_n(h'_2 r_0)$$

(raccord des composantes H_φ).

Rappelons d'ailleurs que si h_1^2, h_2^2 ou h'^2_2 devenaient négatifs, il suffirait, d'après les formules $(58)_I$, $(59)_I$, $(86)_I$, $(87)_I$, de remplacer les h par les η et les

35. ρ_0, densité linéique. Voir formule (5).

36. Voir Généralités, C) Raccord.

fonctions de Bessel classiques par les fonctions de Bessel modifiées I et K [37].

Les 4 dernières équations sont homogènes en $(E_x)_1$, $(E_x)_2$, $(H_x)'_1$ et $(H_x)'_2$. Pour qu'elles admettent une solution non nulle, il faut que leur déterminant soit nul. D'où une équation de compatibilité (équation 100). On est donc conduit en définitive à 3 relations en λ_1 et λ'_1, qui peuvent se mettre sous la forme :

$$(100)\quad \frac{1-s}{\frac{h_2 r_0}{2}} \cdot \frac{J'_n(h_2 r_0)}{J_n(h_2 r_0)} = \frac{K}{\frac{h_1 r_0}{2}} \frac{J'_n(h_1 r_0) + \lambda_1 N'_n(h_1 r_0)}{J_n(h_1 r_0) + \lambda_1 N_n(h_1 r_0)} - \frac{4n^2}{(\alpha r_0)^4} \frac{(K-1)^2 t}{(1-t)^2(1-Kt)^2} \frac{1}{\frac{1}{\frac{h_1 r_0}{2}} \frac{J'_n(h_1 r_0) + \lambda'_1 N'_n(h_1 r_0)}{J_n(h_1 r_0) + \lambda'_1 N_n(h_1 r_0)} - \frac{1}{\frac{h'_2 r_0}{2}} \frac{J'_n(h'_2 r_0)}{J_n(h'_2 r_0)}},$$

$$(94)\quad J_n(h_1 R_0) + \lambda_1 N_n(h_1 R_0) = 0,$$

$$(95)\quad J'_n(h_1 R_0) + \lambda'_1 N'_n(h_1 R_0) = 0,$$

avec

$$(57)\quad h_1^2 = -\alpha^2(1-Kt),$$

$$(86)\quad h_2^2 = -\alpha^2(1-t)(1-s),$$

$$(87)\quad h'^2_2 = -\alpha^2(1-t).$$

Les deux membres de l'équation (100) représentent, au rapport $2/j\omega\varepsilon r_0$ près, le quotient H_φ/E_x du champ magnétique transversal au champ électrique longitudinal, pour *l'onde composante* E existant dans *l'onde complète* considérée dans le faisceau.

Cette remarque nous a conduit à introduire deux coefficients, qui vont nous permettre d'exprimer sous une forme plus suggestive les conditions de raccord.

Une onde complète est la superposition d'une *onde* $E(O_E)$ et d'une *onde* $H(O_H)$.

Par définition nous appellerons « (coefficient E » (y_E) de l'onde complète et « coefficient H » (y_H) de l'onde complète le quotient E_φ/H_x des composantes E_φ et H_x dans O_H et le quotient H_φ/E_x des composantes E_φ et E_x dans O_E. Ces coefficients dépendent de la nature du milieu, du point où on les calcule et de la forme de l'onde, c'est-à-dire de α.

Or l'étude de la propagation d'ondes dans l'ensemble de deux cylindres diélectriques coaxiaux des constantes diélectriques K_1 et K_2 conduit à une condition de compatibilité en α qui s'exprime simplement en fonction des coefficients E et H. Désignant par y_{E_1}, y_{E_2}, y_{H_1} et y_{H_2} les coefficients E et H dans les deux milieux au voisinage de la surface de contact, on a :

$$(101)\quad (y_{E_1} - y_{E_2})(y_{H_1} - y_{H_2}) = \frac{4n^2}{(\alpha r_0)^4} \frac{(K_1 - K_2)^2 t}{(1-K_1 t)^2(1-K_2 t)^2}.$$

Sur cette relation on peut faire immédiatement les remarques suivantes :

Supposons que dans un milieu on ait une onde E pure. Raccorder les coefficients y_E signifierait alors qu'il n'y a pas d'onde H dans l'autre milieu. L'équation (101) montre que si $K_1 \neq K_2$, cette proposition n'est pas possible. Il en serait de même pour une onde H.

Cette impossibilité d'obtenir un régime global pur E ou H est à rapprocher des résultats relatifs à la propagation des ondes dans un guide avec pertes [22].

L'équation (100) montre que la relation (101) reste encore valable dans sa forme en présence du faisceau, la constante diélectrique de ce dernier étant prise égale à 1.

On fait d'ailleurs l'identification immédiatement en mettant (101) sous la forme :

$$(101')\quad y_{E_2} = y_{E_1} + \frac{(K_1-1)^2}{y_{H_2} - y_{H_1}} \cdot \frac{4n^2}{(\alpha r_0)^4} \frac{t}{(1-K_1 t)^2(1-t)^2}.$$

Or dans le cas présent nous avons vu [38] que les ondes H se propagent exactement comme si le faisceau n'existait pas, sans aucune interaction avec lui. y_{H_2} et par suite le second membre de (100) sont alors indépendants des données du faisceau (τ_0, ν_0) et s'expriment uniquement en fonction des données géométriques, de K et de α.

On pourrait d'ailleurs imaginer qu'il existe un espace vide entre le faisceau et le diélectrique. Il serait alors possible de calculer le *coefficient dans le vide* sur la surface du faisceau.

L'équation (100) montre qu'il y a raccord des coefficients E sur la surface de séparation vide-faisceau.

Nous dirons d'une façon générale que, même si le faisceau remplit entièrement le canal creusé dans le diélectrique, le deuxième membre de (100) représente le *coefficient E dans le vide à la surface extérieure du faisceau.*

Le coefficient y_{E_1} dans le vide se calculera par élimination de λ_1 et de λ'_1 entre les équations (94), (95) et le deuxième membre de (100). Il sera fonction des dimensions géométriques R_0, r_0, de la pulsation ω et de la constante de propagation α de l'onde.

L'équation (100) exprime qu'il y a raccord des coefficients E dans le faisceau et dans le vide qui l'entoure. Elle s'écrit :

$$(100)\quad y_{E_2} = y_{E_1}$$

37. Voir renvoi (26). Si on fait la substitution indiquée, il faut la faire également sur les équations (94) et 95), qui définissent λ_1 et λ'_1.

38. Voir chapitre III, paragraphe B. Remarques.

Ondes sans gain. Ondes O_1. — Cherchons tout d'abord à résoudre l'équation (100) pour des ondes sans atténuation ni gain (Ondes O_1).

Si u est la vitesse d'une de ces ondes, on a pour celle-ci :

$$\alpha = -\frac{\omega}{u}. \tag{102}$$

On voit sur les équations (57) et (87) ou (57′) et (87′) et (94), (95) et (100) que y_{E_1} est alors purement réel.

On peut donc représenter par une courbe les variations du coefficient E dans la ligne [39] en fonction de la vitesse u. C'est ce que nous avons fait (fig. 18).

infinies, dont les asymptotes correspondent à des vitesses u_1, u'_n, u''_n,....

u_1 est la vitesse de *propagation libre dans le diélectrique.* C'est la vitesse de propagation d'un régime coaxial.

On a tracé également sur cette même figure la courbe

$$y = y'_{E_2}(u),$$

où

$$y'_{E_2} = y_{E_2} \qquad (\tau_0 = 0). \tag{103}$$

Les points d'intersection de y_{E_1} avec y'_{E_2} donnent les vitesses de propagation des ondes dans la ligne en l'absence de faisceau.

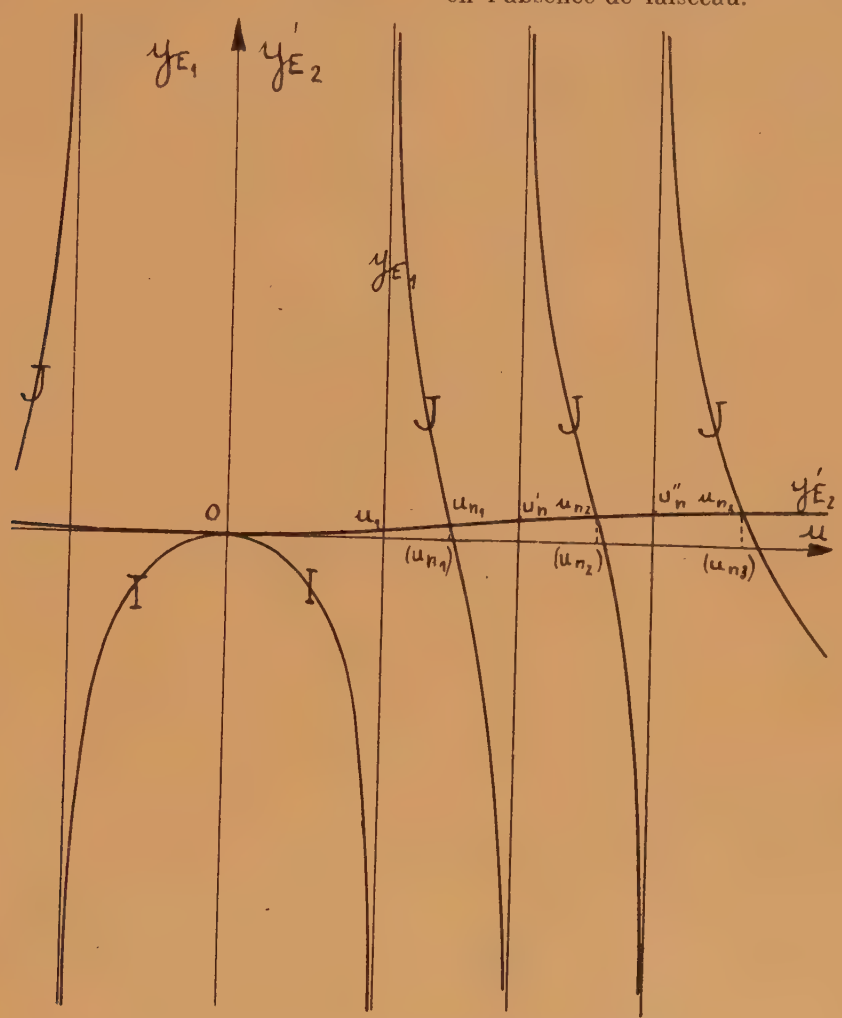

Fig. 18. — Variations du coefficient E dans la ligne.

On pourra de même, la densité électronique τ_0 dans le faisceau étant connue, représenter par une courbe les variations de y_{E_2} en fonction de u (fig. 19).

Examinons successivement ces deux figures.

La courbe $y_{E_1}(u)$ est symétrique par rapport à l'axe des y. Considérons sa moitié correspondant à $u > 0$. La fonction $y_{E_1}(u)$ y est *toujours décroissante.* Elle présente suivant les valeurs respectives de ω, R_0 et r_0 un certain nombre de branches

Soient u_{n1}, u_{n2},...u_{nm} ces vitesses.

Si on fait tendre r_0 vers 0, ces vitesses tendront vers les vitesses de propagation des ondes H_n et E_n dans le diélectrique. On sait que le nombre de ces ondes est borné.

La courbe de $y_{E_2}(u)$ différera très peu de la courbe $y'_{E_2}(u)$ tant que $u \neq v_0$. En effet s est alors négligeable, comme le montrent les expressions (73) et (45).

Par contre, au voisinage de $u = v_0$, la courbe présente un nombre infini de branches asymptotiques s'accumulant autour de v_0. Cela provient du fait que dans cette région s devient prépondérant

39. Par opposition au faisceau. Mais il ne faut pas perdre de vue que c'est un coefficient *dans le vide.*

et fait changer le signe de h_2^2. Remplaçant les fonctions de Bessel modifiées par des fonctions normales J, à chaque zéro du dénominateur correspond une branche asymptotique.

C'est ce que montre la figure 19, où on a porté les variations de $y_{E_2}(u)$ et de $y'_{E_2}(u)$.

Sur les deux figures 18 et 19 on a fait figurer sur chaque branche de courbe une lettre J ou I, indiquant à quel genre de fonction de Bessel il faut faire appel pour trouver l'expression de y correspondante.

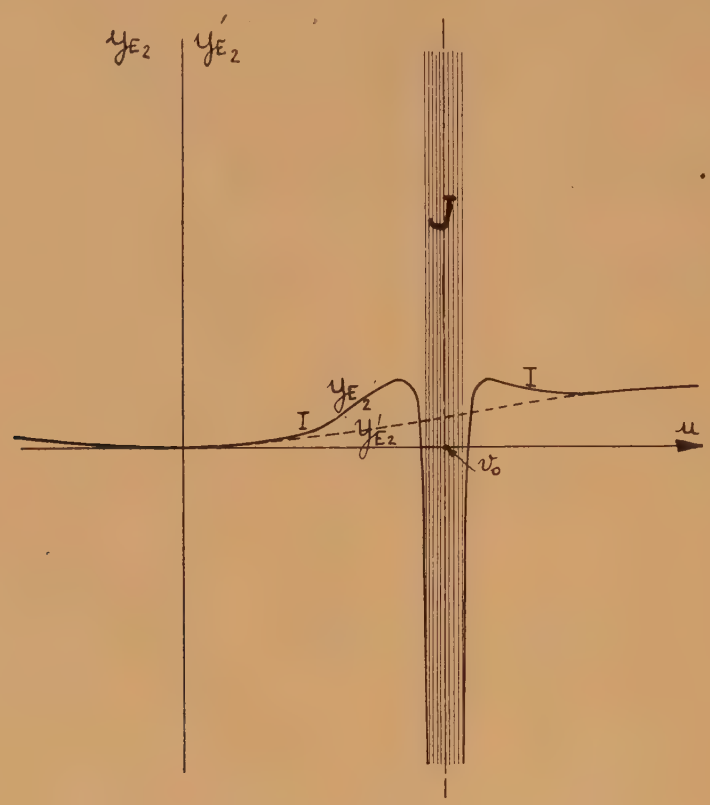

Fig. 19. — Variations du coefficient E dans le faisceau.

Signalons enfin que pour des vitesses $u > c$ la courbe $y'_{E_2}(u)$ pourrait présenter, elle aussi, des branches asymptotiques. Mais comme la vitesse des électrons v_0 reste toujours inférieure à c, la forme donnée sur la figure 19 demeure valable.

Pour obtenir les racines de l'équation (100) en u, il ne nous reste plus maintenant qu'à prendre les intersections des deux courbes $y_{E_1}(u)$ et $y_{E_2}(u)$. C'est ce que nous avons fait sur la figure 20.

L'examen de cette figure montre qu'il existe deux ondes de vitesse voisine de $\pm u_{n1}$, deux de vitesse voisine de $\pm u_{n2}$,.... deux de vitesse voisine de $\pm u_{nm}$, et une infinité d'ondes de vitesse voisine de v_0 [40].

Ondes avec gain. Ondes O_2. — La figure 20 montre encore que si v_0 se rapproche d'une des vitesses u_{nm}, les deux points A et B viennent à se confondre, puis à disparaître. Cela fait pressentir l'apparition de racines complexes de (100), c'est-à-dire d'ondes avec gain.

40. Des ondes de ce dernier type avaient déjà été mises en évidence par W. C. Hahn [14].

Portons maintenant notre attention sur ces ondes.

Pour elles, α ne sera plus purement réel, mais comportera une partie imaginaire :

$$\alpha = \alpha_0 - j\gamma. \tag{104}$$

y_{E_1} et y_{E_2} deviendront complexes. La formule des accroissements finis permet alors d'écrire :

$$y_{E_1}(\alpha) = y_{E_1}(\alpha_0) - j\gamma \frac{dy_{E_1}}{d\alpha}(\alpha_0'),$$

avec

$$|\alpha_0' - \alpha_0| < \gamma.$$

On pourra procéder de même dans le faisceau pour $y_{E_2}(\alpha)$.

On montre alors que si les vitesses v_0 et u ne sont pas très voisines, les parties réelles des dérivées $\frac{dy_{E_1}}{d\alpha}$ et $\frac{dy_{E_2}}{d\alpha}$ sont de signes contraires. L'équation (100) n'est alors vérifiée que pour $\gamma = 0$.

Cela provient d'ailleurs de ce que, si les vitesses sont assez différentes, l'influence du faisceau est pratiquement négligeable ($s \neq 0$) et tout se passe comme si le canal percé dans le diélectrique était vide. Il est bien évident qu'alors, si on néglige les pertes dans le guide, les ondes se propagent sans atténuation ni gain [41].

Si au contraire l'onde se propage à une vitesse voisine de v_0, on pourra écrire d'une façon analogue :

$$y_{E_1} = y_{E_1}(v_0) + \frac{\theta}{v_0}\frac{dy_{E_1}}{d\alpha}(v'_0)$$

(v_0', complexe, est voisin de v_0).

41. Voir remarque ci-après, fin du paragraphe.

On posera :

$$\begin{cases} y_{E_1} = y_{E_1}(v_0) - v_0 P' \dfrac{\theta}{\omega}, & (105) \\ y_{E_2} = \dfrac{1 - s}{\eta_2 r_0} \dfrac{I'_n(\eta_2 r_0)}{I_n(\eta_2 r_0)}, & (100) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} P' = -\dfrac{dy_{E_1}}{du}(v_0'), & (106) \\ \eta_2^2 = \alpha^2(1-t)(1-s), & (86)_0 \\ s = 4\pi\tau_0 \dfrac{e}{m} \mu \dfrac{c^2}{\theta^2}, & (73) \\ \theta = \omega + \alpha v_0. & (45) \end{cases}$$

On peut remarquer que les ondes O_2 apparaissent deux par deux, l'une affaiblie, l'autre amplifiée. Elles ont *toujours une vitesse inférieure au faisceau.*

On en trouve seulement dans les zones de vitesse suivantes :

$$u_1 < v_0 \ll u_{n1},$$
$$u_n' < v_0 \leqslant u_{n2},$$
$$u_n'' < v_0 \ll u_{n3}.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Notons enfin que si $v_0 < u_1$ il ne peut exister que des ondes O_1. La présence du diélectrique est

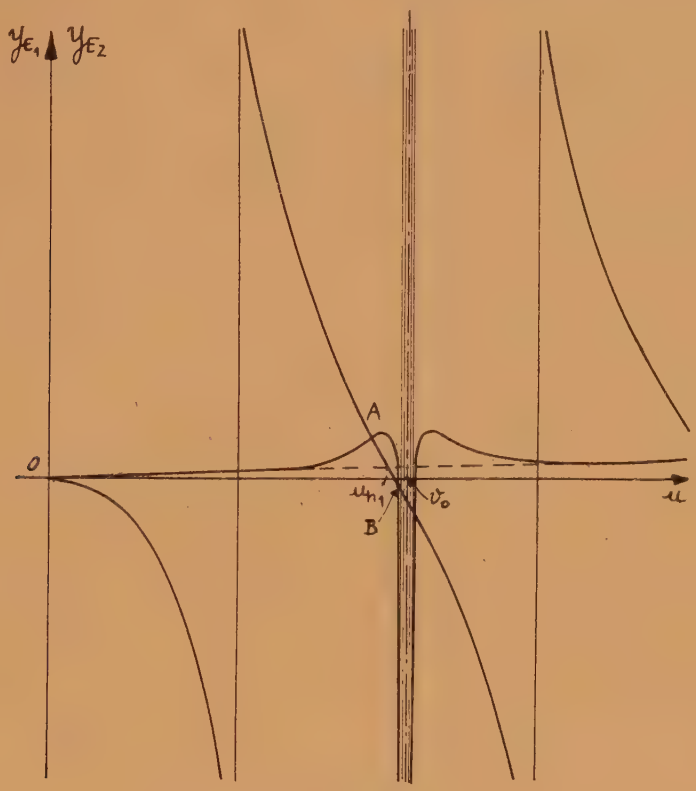

Fig. 20. — Recherche des ondes O_1.

Cette forme se prête bien à la résolution de l'équation en θ. Nous en ferons un peu plus loin une discussion complète.

Pourtant on peut voir sur les équations (100) et (105) que si $y_{E_1}(v_0) \neq 0$ on n'aura de solutions en θ complexes que si

$$y_{E_1}(v_0) > 0.$$

Plus précisément, pour des vitesses $v_0 \neq u_{nm}$ et telles que $y_{E_1}(v_0) > 0$, il existe deux ondes O_2, l'une affaiblie, l'autre amplifiée, dont on peut montrer que la vitesse, extrêmement voisine de v_0, lui est légèrement inférieure.

Si, enfin, $v_0 \# u_{nm}$, le deuxième membre de (105) se réduit à $-P'v_0\,\theta/\omega$. L'équation (100) met alors en évidence 3 ondes dont l'une, du type O_1, serait obtenue par la méthode graphique, et dont les deux autres, du type O_2, l'une amplifiée, l'autre amortie, ont une vitesse inférieure à v_0 [42].

nécessaire pour obtenir une amplification ; c'est donc un phénomène tout à fait différent de celui que nous analysons, qui a lieu dans l'espace de glissement du tube à modulation de vitesse [43].

Remarque : On sait que, dans un guide, il existe, pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure, des ondes qui présentent en tout point la même phase et dont l'amplitude décroît exponentiellement dans l'espace. Pour ces ondes [44], la constante de propagation α est purement imaginaire.

Nous avons laissé de côté ces modes dans notre recherche des ondes O_2, car ils ne peuvent corres-

42. On a vu précédemment qu'il y avait en outre une infinité d'ondes du type O_1 de vitesse voisine de v_0. Celles-ci ne sont pas retrouvées ici directement, car elles correspondent dans (100) à une fonction de Bessel J_n d'argument réel, alors que nous attachons plus spécialement notre attention ici sur des ondes avec gain, exprimées par des fonctions à argument complexe.

43. Pour l'étude de ce processus, cf. Hahn [14] et S. Ramo [23]-[24].

44. En ce qui concerne la discussion de J. R. Pierce [10] sur les « cut-off modes effects », voir renvoi (46).

pondre à aucune onde amplifiée. Une méthode analogue à la méthode graphique représentée sur la figure 20 montre en effet facilement que la présence des électrons ne modifie que légèrement l'atténuation de ces ondes, qui correspondent d'ailleurs toujours à des régimes sans propagation.

CHAPITRE III

GÉNÉRALISATION LIGNE A RETARD QUELCONQUE

A. Calcul des vitesses. Calcul du gain. — Nous pouvons aborder la généralisation de notre étude à une ligne à retard quelconque.

Considérons en effet le procédé de recherche des ondes O_1 et O_2 détaillé sur la figure 20 ou dans les équations (100) et (105).

La ligne n'y intervient que par la fonction :

$$y_{E_1}(u).$$

Et la connaissance de la courbe $y_{E_1}(u)$ suffit pour déterminer aussi bien la vitesse que le gain des ondes O_1 et O_2.

Les modèles que nous avons étudiés nous permettaient le calcul de la fonction $y_{E_1}(u)$. Dans le cas d'une ligne quelconque, on connaît l'allure générale de cette fonction, mais son calcul exact est difficile [45].

Pourtant, en pratique, dans la réalisation d'un amplificateur à onde progressive, les ondes qui nous intéressent au premier chef sont les ondes amplifiées Or, nous l'avons vu, ces ondes ont toujours une vitesse très voisine de v_0. Il nous suffira donc de connaître une très faible portion de la courbe $y_{E_1}(u)$, ou plus précisément la façon dont varie le coefficient E dans la ligne aux vitesses voisines de v_0, pour pouvoir calculer le gain de l'amplificateur.

Nous avons déjà introduit un développement en série de Taylor au voisinage d'un point. La fonction $y_{E_1}(u)$ sera définie par les deux coefficients

et $$y_{E_1}(v_0)$$

$$P = -\frac{dy_{E_1}}{du}(v_0). \tag{106}$$

Pour (23′) $\theta \ll \omega$, $v'_0 \# v_0$, $P' \# P$ et (105) peut en effet s'écrire :

$$y_{E_1} = y_{E_1}(v_0) - v_0 P \frac{\theta}{\omega} \tag{105}$$

en donnant à P la valeur (106) [46]. P est alors la pente de la courbe $y_{E_1}(u)$ au point $u = v_0$, ce qui justifie bien notre affirmation du début : seule la forme de la courbe $y_{E_1}(u)$ est nécessaire pour le calcul du gain, et non pas l'expression complète de la fonction de variable complexe $y_{E_1}(\alpha)$.

Nous allons maintenant donner l'expression du gain correspondant à diverses hypothèses,
sur la vitesse,
sur le diamètre et la densité électronique du faisceau.

1° Supposons $v_0 \neq u_n$, u_n désignant l'une des vitesses d'onde propre de la ligne en l'absence du faisceau.

Alors :

$$y_{E_1}(v_0) \neq 0.$$

Si, en outre, les vitesses sont assez différentes, dans le 2e membre de (105), le terme en θ sera négligeable devant le terme constant :

$$y_{E_1}(v_0).$$

On pourra alors résoudre l'équation simplifiée :

$$\frac{1-s}{\frac{\eta_2 r_0}{2}} \frac{I'_n(\eta_2 r_0)}{I_n(\eta_2 r_0)} = y_{E_1}(v_0). \tag{107}$$

avec

$$\eta_2^2 = \alpha^2(1-t)(1-s). \tag{86$_0$}$$

Cette équation n'est pas algébrique et en général on ne sait pas la résoudre exactement.

Pourtant on connaît une expression simple de la fonction $\frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$ dans deux cas [25] :

si $|x| \ll 1$,
si $|x| \gg 1$.

On a, dans le premier cas :

$$\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} \# \frac{n}{x} + \frac{1}{n+1}\frac{x}{2} \qquad |x| \ll 1\ ; \tag{108}$$

et dans le deuxième :

$$\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} \# 1 \qquad \begin{array}{l} |x| \gg 1, \\ \arg x \neq \pm\frac{\pi}{2}. \end{array} \tag{109}$$

Cherchons à utiliser l'une de ces deux expressions : la première remplacerait (107) par

$$\frac{2n}{\alpha^2 r_0^2(1-t)} + \frac{1-s}{n+1} = y_{E_1}(v_0).$$

Le premier terme du premier membre est en général petit devant le second membre ; le négliger conduit alors à :

$$1 - s = (n+1)y_{E_1}(v_0).$$

Et l'expression (108) n'est valable que pour $\alpha^2 r_0^2 s \ll 1$, c'est-à-dire pour des valeurs de s moins élevées que celles auxquelles conduirait cette équation.

L'expression (109) permet au contraire d'écrire (107) sous la forme :

$$\frac{2}{\alpha r_0}\frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{1-t}} = y_{E_1}(v_0). \tag{110}$$

45. J. R. Pierce, dans sa théorie, a cherché une représentation du même genre appliquée à un système contenant le faisceau, que l'on considère alors uniquement sous sa dimension longitudinale (étude unidimensionnelle). Il utilise une *forme de fonction d'onde due à* Schellkunoff.

46. Écrire ces équations (105) et (106) revient à négliger la courbure de $y_{E_1}(u)$ au voisinage de v_0. Cette courbure a, en général, un effet nuisible sur le gain ; c'est précisément cet effet qui est calculé par J. R. Pierce [10], dans son calcul des « cut-off modes ». En effet le terme supplémentaire introduit dans ce calcul est équivalent à un terme en θ^2 dans l'équation (105).

ou

$$(110') \quad -4\pi\tau_0 \frac{e}{m}\mu \frac{c^2}{\theta^2} = \frac{\alpha^2 r_0^2}{4}(1-t)y^2_{E_1}(v_0) - 1.$$

Si le second membre est positif, c'est-à-dire si v_0 n'est pas trop voisin d'une des vitesses propres u_n de la ligne, cette équation nous fournit deux racines en θ purement imaginaires [47] ; en négligeant 1 devant le premier terme du second membre, on a :

$$(111) \qquad \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{y_{E_1}(v_0)} \frac{2c}{\omega r_0} \frac{2}{\eta'_2 r_0} \sqrt{-\sigma},$$

avec, comme précédemment :

$$(92) \qquad \sigma = \rho_0 \frac{e}{m}\mu = \pi r_0^2 \tau_0 \frac{e}{m}\mu.$$

On en déduit le gain γ [48] :

$$(111') \qquad \gamma = \pm \frac{1}{y_{E_1}(v_0)} \frac{2c}{\omega r_0} \frac{2}{\eta'_2 r_0} \sqrt{\sigma}.$$

Cette formule n'est valable d'après (110) que si $y_{E_1}(v_0) > 0$, c'est-à-dire si nous revenons au cas de la ligne diélectrique, pour des vitesses :

$$u_1 < v_0 < u_{n1},$$
$$u_n' < v_0 < u_{n2}, \ldots\ldots$$

C'est ce que nous avions déjà signalé à propos de l'étude de ce modèle :

Si $y_{E_1}(v_0) < 0$, à la place de ces ondes O_2 on a deux ondes O_1 obtenues sur les courbes de la figure 20.

Examinons maintenant plus particulièrement la forme des expressions (111) ou (111').

Il apparaît que le gain est d'autant plus grand que $y_{E_1}(v_0)$ est plus petit, c'est-à-dire qu'on se rapproche davantage d'une vitesse de propagation propre de la ligne sans électrons.

Nous sommes ainsi conduit à penser que le résultat obtenu dans l'étude de la ligne à cavités multiples, à savoir que le gain est maximum quand la vitesse moyenne v_0 des électrons est égale à la vitesse propre des ondes dans la ligne u_n, est absolument général.

Pour voir dans quelle mesure cela est vrai, nous allons donc maintenant chercher à calculer le gain lorsque v_0 est voisin d'une des vitesses u_n.

2° $v_0 \# u_n$. *Gain maximum.*

Dans l'équation (105) il ne sera plus possible alors de négliger le terme en θ devant le terme $y_{E_1}(v_0)$.

Nous devons donc garder l'équation complète :

$$(105) \qquad \frac{1-s}{\frac{\eta_2 r_0}{2}} \frac{I'_n(\eta_2 r_0)}{I_n(\eta_2 r_0)} = y_{E_1}(v_0) - v_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

Mettons en évidence sur cette équation la vitesse u_n de propagation dans la ligne en l'absence d'électrons : cette vitesse est telle que

$$(112) \qquad \frac{1}{\frac{\eta'_{20} r_0}{2}} \frac{I'_n(\eta'_{20} r_0)}{I_n(\eta'_{20} r_0)} = y_{E_1}(u_n),$$

avec comme précédemment :

$$(87)_0 \qquad \eta'^2_{20} = \alpha^2(1-t) = \frac{\omega^2}{u_n^2} - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Pour continuer notre discussion, il nous faudra maintenant examiner successivement plusieurs cas, suivant le rayon r_0 et la densité ρ_0 du faisceau.

Dans chaque cas, nous ferons une étude au voisinage de $v_0 = u_n$ et nous déterminerons les conditions de gain optimum et la valeur de ce gain.

a) Faisceau étroit : $\omega r_0 \ll v_0$.

Faible densité. Dans ces conditions :

$$|\eta'_{20} r_0| \ll 1.$$

On pourra utiliser la relation (108) pour obtenir une valeur approchée du premier membre (112), qui devient :

$$(112)_A \qquad \frac{2n}{\eta'^2_{20} r_0^2} - \frac{1}{n+1} = y_{E_1}(u_n).$$

Nous voulons faire une étude au voisinage de la vitesse u_n. Nous poserons :

$$y_{E_1}(u) = y_{E_1}(u_n) + \Delta y_{E_1}.$$

(105) se met alors sous la forme :

$$(113) \qquad \frac{1-s}{\frac{\eta_2 r_0}{2}} \frac{I'_n(\eta_2 r_0)}{I_n(\eta_2 r_0)} - \frac{2n}{\eta'^2_{20} r_0^2} - \frac{1}{n+1} = \Delta y_{E_1} - v_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

Cette équation n'étant pas algébrique, nous allons encore la remplacer par des expressions approchées simples.

Pour commencer supposons que $|\eta_2 r_0| \ll 1$, ce qui nous permettra d'appliquer la formule (108).

Nous montrerons un peu plus loin que cette hypothèse conduit à admettre, pour densité électronique dans le faisceau, une densité assez faible.

Bornons-nous pour l'instant à poursuivre le calcul. L'équation (113) devient :

$$(113') \qquad \frac{2n}{\eta'^2_2 r_0^2} - \frac{2n}{\eta'^2_{20} r_0^2} - \frac{s}{n+1} = \Delta y_{E_1} - v_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

D'où d'après (45) et en supposant (23') $\theta \ll \omega$:

$$(114) \qquad \frac{s}{n+1} = \left[v_0 P - \frac{4n}{\eta'^2_2 r_0^2} \frac{\omega}{\alpha v_0} \right] \frac{\theta}{\omega} - \Delta y_{E_1}.$$

Le deuxième terme du crochet étant en général négligeable devant le premier, on obtiendra simplement :

$$(115) \qquad \left[\frac{\theta}{\omega} - \frac{\Delta y_{E_1}}{v_0 P} \right] \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 = \frac{4}{n+1} \frac{1}{v_0 P} \left(\frac{c}{\omega r_0} \right)^2 \sigma.$$

Cette expression est d'ailleurs rigoureusement exacte pour $n = 0$, puisque le terme négligé dans le crochet est alors nul. (115) est une équation du 3e degré en θ. Aux ondes avec gain correspondent des racines θ complexes.

Nous ferons une étude de la partie imaginaire de θ : γv_0 au voisinage de $\Delta y_{E_1} = 0$.

47. L'introduction du terme en θ dans le deuxième membre de (110) montre que la vitesse de ces deux ondes est *légèrement inférieure à* v_0.

48. Cette expression est de la même forme que celle obtenue par J. Voge [15].

Désignons par θ_0 la valeur de θ pour $\Delta y_{E_1} = 0$ et par γ_0 la valeur correspondante du gain :

$$(116) \qquad \left(\frac{\theta_0}{\omega}\right)^3 = \frac{4}{n+1}\frac{1}{v_0 P}\left(\frac{c}{\omega r_0}\right)^2 \sigma,$$

$$(116') \qquad \gamma_0^3 = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{4}{n+1}\frac{1}{v_0 P}\frac{\omega^3}{v_0^3}\left(\frac{c}{\omega r_0}\right)^2 \sigma.$$

En bornant les développements au premier terme on a alors :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} = -\frac{(\Delta y_{E_1}/v_0 P)^2}{9\left|\frac{\theta_0}{\omega}\right|^2}.$$

γ est donc maximum pour $\Delta y_{E_1} = 0$.

Le gain maximum est obtenu pour $v_0 = u_n$. L'équation (116) en donne la valeur.

Remarquons que les expressions (116) et (116′) sont du même type que celles que nous avions déjà rencontrées dans l'étude du tube à cavités multiples [49].

En particulier elles mettent en évidence trois ondes dont l'une, de vitesse supérieure à v_0, est du type O_1 et les deux autres, de vitesse inférieure à v_0, sont du type O_2, l'une étant amplifiée, l'autre amortie.

Il reste à donner la signification physique de la condition

$$|\eta_2 r_0| \ll 1.$$

Elle s'écrit :

$$|\alpha^2(1-t)(1-s)r_0^2| \ll 1.$$

Or le faisceau est étroit et

$$|\alpha^2(1-t)r_0^2| \ll 1.$$

Il reste donc à écrire que

$$|\alpha^2(1-t)s r_0^2| \ll 1.$$

Utilisant l'expression (116) et remarquant qu'en général

$$t = \frac{\omega^2}{\alpha^2 c^2} \ll 1,$$

on obtient :

$$(117) \qquad \sigma \ll \sigma_1 = \frac{1}{4(n+1)^2}\left(\frac{v_0}{\omega r_0}\right)^4 \frac{1}{c^2 P^2}.$$

Pour que la solution que nous venons d'obtenir soit valable, il faut non seulement que le faisceau soit étroit, mais encore que la densité électronique y soit assez faible, donc que le courant soit petit.

Avant d'aborder l'étude du cas où l'on aurait un faisceau étroit et dense, nous allons aborder celle du cas où l'on aurait un faisceau large et peu dense.

b) Faisceau large $\omega r_0 \ll v_0$.

Faible densité.

Alors d'après (109) on pourra écrire :

$$(112)_B \qquad \frac{2}{\eta'_{20} r_0} = y_{E_1}(u_n).$$

Comme dans l'étude précédente, nous poserons encore :

$$y_{E_1}(u) = y_{E_1}(u_n) + \Delta y_{E_1}.$$

(105) s'écrira alors :

$$(118) \qquad \frac{1-s}{\frac{\eta_2 r_0}{2}}\frac{I'_n(\eta_2 r_0)}{I_n(\eta_2 r_0)} - \frac{1}{\frac{\eta'_{20} r_0}{2}} = \Delta y_{E_1} - v_0 P\frac{\theta}{\omega}.$$

Alors, sauf si s est très voisin de 1, on aura aussi :

$$(118') \qquad \frac{\sqrt{1-s}}{\frac{\eta'_2 r_0}{2}} - \frac{1}{\frac{\eta'_{20} r_0}{2}} = \Delta y_{E_1} - v_0 P\frac{\theta}{\omega}.$$

Nous sommes encore amené, pour pouvoir résoudre le système aisément, à examiner successivement deux cas. Supposons pour commencer (nous verrons que ce sera réalisé pour de faibles densités électroniques) que l'on a :

$$s \ll 1.$$

Alors on peut développer en série le radical et ne garder que le premier terme :

$$\frac{1}{\frac{\eta'_2 r_0}{2}} - \frac{1}{\frac{\eta'_{20} r_0}{2}} - \frac{s}{\eta'_2 r_0} = \Delta y_{E_1} - v_0 P\frac{\theta}{\omega}.$$

D'où, d'après (45) et en supposant : (23′) : $\theta \ll \omega$

$$(119) \qquad \frac{s}{\eta'_2 r_0} = \left[v_0 P - \frac{2}{\eta'_2 r_0}\frac{\omega}{\alpha v_0}\right]\frac{\theta}{\omega} - \Delta y_{E_1}.$$

Cette fois-ci le 2e terme du crochet est toujours négligeable et en supposant toujours $t \ll 1$, on a sensiblement :

$$(120) \qquad \left[\frac{\theta}{\omega} - \frac{\Delta y_{E_1}}{v_0 P}\right]\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = \frac{4}{v_0 P}\frac{v_0 c^2}{(\omega r_0)^3}\sigma.$$

Cette équation est exactement du même type que l'équation (115).

Le gain maximum est obtenu pour $v_0 = u_n$. On a :

$$(121) \qquad \left(\frac{\theta_0}{\omega}\right)^3 = \frac{4}{v_0 P}\frac{v_0 c^2}{(\omega r_0)^3}\sigma,$$

$$(121') \qquad \gamma_0^3 = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{4}{v_0 P}\frac{\omega^3}{v_0^3}\frac{v_0 c^2}{(\omega r_0)^3}\sigma.$$

Et on trouve ainsi une nouvelle confirmation des résultats obtenus dans notre première théorie.

Cherchons enfin dans quelle condition de densité cette dernière solution est applicable.

Nous avons fait l'hypothèse $s \ll 1$; d'après (121) notre solution sera donc valable pour

$$(122) \qquad \sigma \ll \sigma_2 = \frac{1}{4c^2 P^2}.$$

Nous aurons passé en revue tous les cas possibles lorsque nous aurons considéré les deux hypothèses suivantes encore non envisagées :

faisceau étroit, forte densité ;

faisceau large, forte densité.

49. Voir équation (47).

C. *Forte densité.* — Les deux cas qui nous restent à examiner correspondent tous deux à

$$\eta_2 r_0 \gg 1, \qquad s \gg 1.$$

Nous devrons alors toujours avoir recours à l'expression (109) et remplacer (113) et (118′) par

$$(123) \qquad \frac{2\sqrt{-s}}{\eta'_2 r_0} - \frac{2n}{\eta'^2_{20} r_0^2} - \frac{1}{n+1} = \Delta y_{E_1} - \varphi_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

$$(123') \qquad \frac{2\sqrt{-s}}{\eta'_2 r_0} - \frac{2}{\eta'_{20} r_0} = \Delta y_{E_1} - \varphi_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

Dans ces expressions on voit que la vitesse u_n ne joue pas le même rôle que dans les études précédentes. En particulier la forme de ces équations laisse prévoir à priori que ce ne sera pas la vitesse qui procurera le gain maximum.

Au lieu de faire une étude du gain au voisinage de la vitesse u_n, nous la ferons alors au voisinage de la vitesse (u_n) telle que

$$(124) \qquad y_{E_1}[(u_n)] = 0.$$

Cette vitesse (u_n) sera d'ailleurs assez voisine de u_n, comme on peut le voir sur la figure 18 :

u_n est un point d'intersection de y_{E_1} avec y'_{E_1} ;
(u_n) est un point d'intersection de y_{E_1} avec l'axe des u.

Quoi qu'il en soit, si nous posons maintenant :

$$y_{E_1}(u) = y_{E_1}[(u_n)] + \Delta' y_{E_1},$$

les deux équations (123) et (123′) prendront la même forme :

$$(125) \qquad \frac{2\sqrt{-s}}{\eta'_2 r_0} = \Delta' y_{E_1} - \varphi_0 P \frac{\theta}{\omega}.$$

Cette équation est du 4e degré en θ. Par prolongement analytique des solutions (113) et (118), on voit aisément que seules les deux racines à partie réelle négative sont valables. La troisième racine réelle de (116) ou (121) se retrouverait par la méthode graphique de la figure 20.

Les ondes O_2 correspondent alors aux deux racines à partie ~~imaginaire~~ réelle négative de :

$$(126) \qquad \left[\frac{\theta}{\omega} - \frac{\Delta' y_{E_1}}{\varphi_0 P}\right]\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = \frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\varphi_0 c}{(\omega r_0)^2}\sqrt{-\sigma}.$$

Nous pouvons, comme précédemment, faire une étude des variations du gain au voisinage de $\Delta' y_{E_1} = 0$.

Posant :

$$(127) \qquad \left(\frac{\theta_0}{\omega}\right)^2 = \frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\varphi_0 c}{(\omega r_0)^2}\sqrt{-\sigma}$$

et

$$(127') \qquad \gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\omega^2}{\varphi_0^2}\frac{\varphi_0 c}{(\omega r_0)^2}\sqrt{\sigma},$$

on obtient :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} = -\frac{(\Delta' y_{E_1}/\varphi_0 P)^2}{8|\theta_0/\omega|^2}.$$

Le gain maximum est obtenu pour $\varphi_0 = (u_n)$. Sa valeur est donnée par (125′).

Si nous comparons aux résultats précédents, on voit que les ondes avec gain ont toujours une même vitesse, inférieure à φ_0, et qu'on a toujours à la fois une onde amplifiée et une onde amortie.

Pourtant le gain maximum est maintenant obtenu *pour une vitesse de faisceau supérieure à la vitesse propre des ondes dans la ligne*, la différence étant d'autant plus grande, si n est différent de 0, que le faisceau est plus étroit.

D'autre part, si on cherche pour quelles densités électroniques ces résultats sont valables, on trouve :

$$\sigma \gg (n+1)^2\sigma_1,$$

ou

$$\sigma \gg 4\sigma_2,$$

suivant les valeurs relatives de ωr_0 et φ_0.

Tous les cas ont bien ainsi été examinés. On peut d'ailleurs constater qu'à la limite de chaque domaine étudié les solutions se raccordent sensiblement.

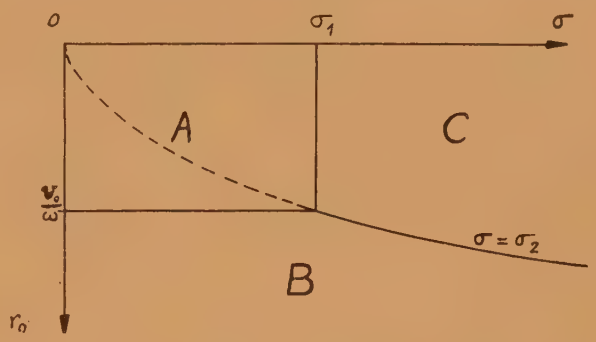

Fig. 21. — Nature de la solution. Ondes E_0.

Les résultats se trouvent résumés sur la figure 21, tracée dans le cas d'une ligne diélectrique en symétrie de révolution. Rappelons les expressions du gain [50] :

$$a) \quad (116') \qquad \gamma_0^3 = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{1}{n+1}\frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\omega^3}{\varphi_0^3}\left(\frac{c}{\omega r_0}\right)^2 \sigma ;$$

$$b) \quad (121') \qquad \gamma_0^3 = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\omega^3}{\varphi_0^3}\frac{\varphi_0 c^2}{(\omega r_0)^3}\sigma ;$$

$$c) \quad (127') \qquad \gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\omega^2}{\varphi_0^2}\frac{\varphi_0 c}{(\omega r_0)^2}\sqrt{\sigma} ;$$

avec (92) $\qquad \sigma = \rho_0 \frac{e}{m}\mu.$

B. Applications. — Nous allons pour terminer faire quelques applications de ces formules et en particulier les utiliser pour retrouver des résultats obtenus dans d'autres études.

La ligne utilisée n'intervient dans ces formules que par la pente P. Nous calculerons dans chaque modèle cette pente et appliquerons ensuite l'une des trois expressions du gain.

a) *Ligne à cavités multiples.* — Revenons pour commencer à la ligne à cavités multiples [51]. On calculera P de la façon suivante :

$$(100) \qquad y_{E_1} = \frac{2}{j\varepsilon\omega r_0}\frac{H_\varphi}{E_x} \quad \text{et} \quad P = -\frac{dy_{E_1}}{du}.$$

50. Cf. [18], [19].
51. Voir chapitre I, 1°).

E_x intervient dans l'étude proprement dite ; H_φ se calculera à partir du courant total, par application du théorème d'Ampère.

Faisons pour simplifier $\delta x = \Delta x$; on obtient :

$$(128) \qquad \frac{v_0 P}{4} = \frac{2\Delta x^2}{\varepsilon r_0^2 v_0}\,\omega^2 G^2 Z_c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}.$$

D'où, en utilisant l'équation (116′) pour n = 0 [52], l'expression du gain :

$$(42) \qquad \gamma_0^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{1}{2}\,\frac{\rho_0 \frac{e}{m}}{\omega G_0^2 v_0^2}\,\frac{1}{Z_c\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}.$$

C'est bien la relation que nous avions obtenue dans notre première étude.

b) *Ligne diélectrique.* — A partir de l'équation complète (100), nous pouvons calculer P.

On ne développera pas ici le calcul ; on obtient :

$$(129) \qquad v_0 P \# \frac{2p}{p-1}\,\frac{c^2}{v_0^2}\left\{\frac{\dfrac{N''_n(h_1 r_0)}{N''_n(h_1 r_0)}\,\dfrac{J''_n(h_1 r_0)}{} - \dfrac{J_n(h_1 R_0)}{N_n(h_1 R_0)}}{\dfrac{N_n(h_1 r_0)}{}\,\dfrac{J_n(h_1 r_0)}{N_n(h_1 r_0)} - \dfrac{J_n(h_1 R_0)}{N_n(h_1 R_0)}} - \frac{R_0}{r_0}\,\frac{\left[\dfrac{J'_n(h_1 r_0)}{N'_n(h_1 r_0)} - \dfrac{J_n(h_1 r_0)}{N_n(h_1 r_0)}\right]\left[\dfrac{J'_n(h_1 R_0)}{N'_n(h_1 R_0)} - \dfrac{J_n(h_1 R_0)}{N_n(h_1 R_0)}\right]}{\dfrac{N_n(h_1 R_0)}{N'_n(h_1 R_0)}\,\dfrac{N_n(h_1 r_0)}{N'_n(h_1 r_0)}\left[\dfrac{J_n(h_1 R_0)}{N_n(h_1 R_0)} - \dfrac{J_n(h_1 r_0)}{N_n(h_1 r_0)}\right]^2}\right\}$$

avec

$$(130) \qquad p = K\,\frac{v_0^2}{c^2}.$$

L'expression (129) s'applique au cas des ondes du genre E_n si $h_1 r_0 \ll 1$.

On peut montrer que la valeur de P ainsi trouvée est valable aussi pour l'onde H_n, ce qui ne doit pas nous surprendre, puisque si, dans le diélectrique, il y a prépondérance d'une sorte d'onde, il n'en est pas de même dans le faisceau, où les deux ondes E et H sont toujours mélangées :

En définitive, dans tous les cas, on a :

$$(131) \qquad v_0 P \# \frac{4p}{p-1}\,\frac{v_0^2}{c^2}\,\frac{R_0}{r_0}\,\frac{n!}{\pi}\left(\frac{2}{h_1 r_0}\right)^{2n+1}.$$

ou, pour n = 0 (auquel cas les ondes E_0 et H_0 se séparent complètement) :

$$(131') \qquad v_0 P \# \frac{2p}{p-1}\,\frac{v_0^2}{c^2}\,\frac{R_0}{r_0}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{2}{h_1 r_0}.$$

En appliquant ces résultats à un faisceau unidimensionnel (cas *a*), on retrouve le résultat obtenu par R. Wallauschek [16].

D'une façon générale, pour n = 0, les résultats sont les suivants :

$$a) \qquad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^3 = \pi\,\frac{v_0}{\omega R_0}\,\frac{(p-1)^{3/2}}{p}\,\sigma,$$

$$b) \qquad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^3 = \pi\,\frac{v_0^2}{\omega^2 r_0 R_0}\,\frac{(p-1)^{3/2}}{p}\,\sigma,$$

$$c) \qquad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = \pi\,\frac{v_0^2}{c\omega R_0}\,\frac{(p-1)^{3/2}}{p}\,\sqrt{-\sigma},$$

avec

$$(132) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\pi^2}{64}\left(\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)^3\left(\dfrac{\omega r_0}{v_0}\right)^4\left(\dfrac{r_0}{R_0}\right)^2\dfrac{(p-1)^3}{p^2}, \\ \sigma_2 = \dfrac{\pi^2}{256}\left(\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)^3\left(\dfrac{r_0}{R_0}\right)^2\dfrac{(p-1)^3}{p^2}. \end{cases}$$

3° *Problème pratique.* — Si on a en vue la réalisation d'un amplificateur avec ligne diélectrique, on peut se demander quelle vitesse et quelles dimensions géométriques il y aura lieu de choisir. Les résultats sont les suivants :

a) *Si la vitesse des électrons est imposée,* il y aura intérêt à se rapprocher le plus possible de la fréquence de coupure, en réduisant le diamètre du tube jusqu'à ce que les ondes E_{01} atteignent la vitesse v_0.

b) *Si ce sont les dimensions géométriques qui sont imposées,* il y aura lieu d'augmenter v_0 jusqu'à la plus grande des vitesses d'onde E_{0n} accessible.

C. Ligne amortie. Réglage de la vitesse. — Les études que nous venons de faire nous ont donné la vitesse et le gain des ondes O_2 tout d'abord pour des vitesses v_0 assez différentes de u_n, vitesse d'onde propre de la ligne, puis au voisinage de cette vitesse.

Elles nous ont montré que le gain était maximum si v_0 était égal à une certaine vitesse que nous désignerons par (v_n), égale suivant la densité électronique du faisceau à u_n ou à (u_n). Il peut être intéressant de raccorder ces deux études, c'est-à-dire en définitive de résoudre numériquement l'équation (105) dans un domaine de vitesses étendu.

D'autre part les études que nous avons développées jusqu'ici négligeaient toutes l'amortissement propre de la ligne.

Nous allons maintenant introduire cet amortissement et c'est dans ce cas général que nous résoudrons numériquement l'équation (105).

Pour fixer les idées, considérons comme type de ligne la ligne diélectrique ; on peut y envisager deux sortes de pertes :

les pertes dans le diélectrique lui-même ;

les pertes dans la paroi métallique extérieure.

On tiendre compte des pertes dans le diélectrique en remplaçant la constante diélectrique réelle K par une constante complexe caractérisée par un angle de pertes différent de 0.

Pour calculer l'effet de la résistivité du métal extérieur, on pourra faire appel à une méthode indiquée par Mr Louis de Broglie [22]. Cette méthode consiste à raccorder les ondes se propageant dans le métal imparfaitement conducteur et dans le diélectrique suivant une méthode très voisine de celle que nous avons développée ici. Nous nous bornerons à en retenir les résultats.

L'effet de ces deux causes de pertes est d'introduire dans la ligne, en l'absence de faisceau, une légère variation de vitesse (δv_n) par rapport à la ligne sans pertes, et un amortissement.

52. Notre étude était unidimensionnelle. On voit que cela impose : n = 0, faisceau étroit, et également densité électronique faible.

Nous allons montrer que l'équation (115) se met alors sous la forme :

$$(133)\quad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\left[\frac{\theta}{\omega}+K-j\delta\right]=\frac{4}{n+1}\frac{1}{\varphi_0 P}\frac{c^2}{(\omega r_0)^2}\sigma$$

avec

$$(134)\quad K=\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}\qquad \Delta\varphi_0=\varphi_0-[(\varphi_n)+(\delta\varphi_n)]$$

et

$$\delta=\gamma'\frac{\varphi_0}{\omega}.$$

(120) et (126) s'écriraient de même :

$$(135)\quad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\left[\frac{\theta}{\omega}+K-j\delta\right]=\frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\varphi_0 c^2}{(\omega r_0)^3}\sigma\,;$$

$$(136)\quad \left(\frac{\theta}{\omega}\right)\left[\frac{\theta}{\omega}+K-j\delta\right]=\frac{4}{\varphi_0 P}\frac{\varphi_0 c}{(\omega r_0)^2}\sqrt{-\sigma}.$$

Remarquons tout d'abord que l'équation (133) est bien de la même forme que l'équation (105). En outre pour $\sigma = 0$, c'est-à-dire en l'absence d'électrons, on trouve :

$$\frac{\theta}{\omega}=-K+j\delta=-\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}+j\gamma'\frac{\varphi_0}{\omega}\,;$$

c'est-à-dire que l'onde a une vitesse égale à $(\varphi_n)+(\delta\varphi_n)$ et présente un amortissement γ'. C'est précisément ce que nous désirions obtenir.

Nous allons donc résoudre ces équations (133), (135) et (136) en θ. Nous représenterons les résultats en fonction de K, c'est-à-dire de la vitesse, avec δ, c'est-à-dire l'amortissement de la ligne, comme paramètre.

La discussion de l'équation (130) en K, pour $\delta = 0$, ne sera pas différente de celle représentée dans une étude précédente, figure 13 [53].

D'ailleurs une étude plus complète pour δ quelconque a été développée par J. R. Pierce [10]. Et de plus, cette équation (133) n'est applicable qu'à des faisceaux étroits et peu denses, circonstances rarement rencontrées en pratique.

L'équation (135) ne diffère pas dans sa forme de l'équation (133). Elle correspond aussi à des densités faibles.

Aussi, nous avons préféré résoudre l'équation (136), ce qui, nous semble-t-il, est susceptible de fournir des renseignements plus utiles.

Les figures 22 A, 22 B représentent les variations du gain et de la vitesse des ondes en fonction de la différence de vitesse $\Delta\varphi_0$ pour divers amortissements de la ligne [54].

Il apparaît, et ce résultat serait valable pour les équations (133) et (135), que pour $\delta = 0$ le maximum de gain est obtenu lorsque

$$\Delta\varphi_0 = 0.$$

53. Il est bon de faire remarquer que l'équation (133) peut se trouver sur le cas étudié d'une ligne à cavités multiples ; il suffit d'éliminer $|\Gamma|$ entre $(33)_1$ et (34) pour retrouver une expression analogue.

54. Il faut pourtant signaler que pour $\Delta\varphi_0 > 0$, on obtient des ondes dont la vitesse s'écarte rapidement beaucoup de φ_0. A ces ondes correspondent donc des θ relativement grands, ce qui peut avoir pour effet de faire sortir du domaine de validité des formules établies pour le cas *c*. Il y aurait lieu alors de raccorder aux courbes tracées par J. R. Pierce [10].

C'est ce que nous avions mis en évidence précédemment.

Par contre, si on introduit dans la ligne un amortissement, il pourra y avoir lieu de modifier la vitesse du faisceau pour maintenir le gain à sa valeur maximum.

Cette circonstance ne se produira pas d'ailleurs nécessairement, et ce sera le cas, en particulier, si on amortit une ligne diélectrique en créant des pertes dans la paroi métallique extérieure. En effet, dans ce cas [22] :

$$(\delta\varphi_n)=\frac{\gamma'(\varphi_n)^2}{\omega}.$$

Et précisément le gain maximum est alors obtenu pour une valeur de $\Delta\varphi_0$ égale. Les deux écarts de vitesse se compensent et le maximum de gain est obtenu pour

$$\varphi_0 = (\varphi_n).$$

Mais, en général, si l'on introduit des pertes dans la ligne, il faudra, pour conserver le gain maximum, retoucher la vitesse du faisceau.

Applications. — La présence de pertes est d'une grande importance pratique.

Nous avons mis en évidence, outre les ondes de vitesse voisine de φ_0, dont l'une est amplifiée, une onde de vitesse voisine de $-\varphi_0$.

Lorsque nous avions cherché à déterminer, à la fin du chapitre I, le dosage des diverses ondes qui prenaient naissance effectivement dans le tube, nous avions fait en sorte d'éliminer cette onde de retour. En pratique, il ne sera jamais possible de réaliser une adaptation parfaite ($Z_s = Z_c$) à la sortie du tube.

Il y aura alors une onde de retour. Si cette onde de retour n'est pas amortie, elle sera susceptible, en revenant à l'entrée, d'exciter une onde O_2 et, en général, de provoquer une auto-oscillation.

Le tube, d'amplificateur, serait devenu oscillateur.

On remédie à cet inconvénient en amortissant la ligne, ce qui affaiblit l'onde de retour, sans réduire considérablement le gain de l'onde amplifiée.

Pour fixer un ordre de grandeur de l'amortissement à réaliser, on peut chercher à obtenir pour l'onde de retour un affaiblissement précisément égal à l'amplification de l'onde O_2. En tout point de l'amplificateur ces deux ondes seront dans le même rapport. S'il y a une perte d'énergie dans le phénomène de modulation à l'entrée du tube, il n'y aura pas de risque d'auto-oscillation.

On voit, d'après les courbes de la figure 22 A, qu'on a, pour

$$\gamma_{Max} = \gamma' :$$

$$(137)\qquad \gamma' = \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}.$$

La figure 22 A résout encore un autre problème important en pratique : du point de vue constructif, il est intéressant de savoir avec quelle précision il

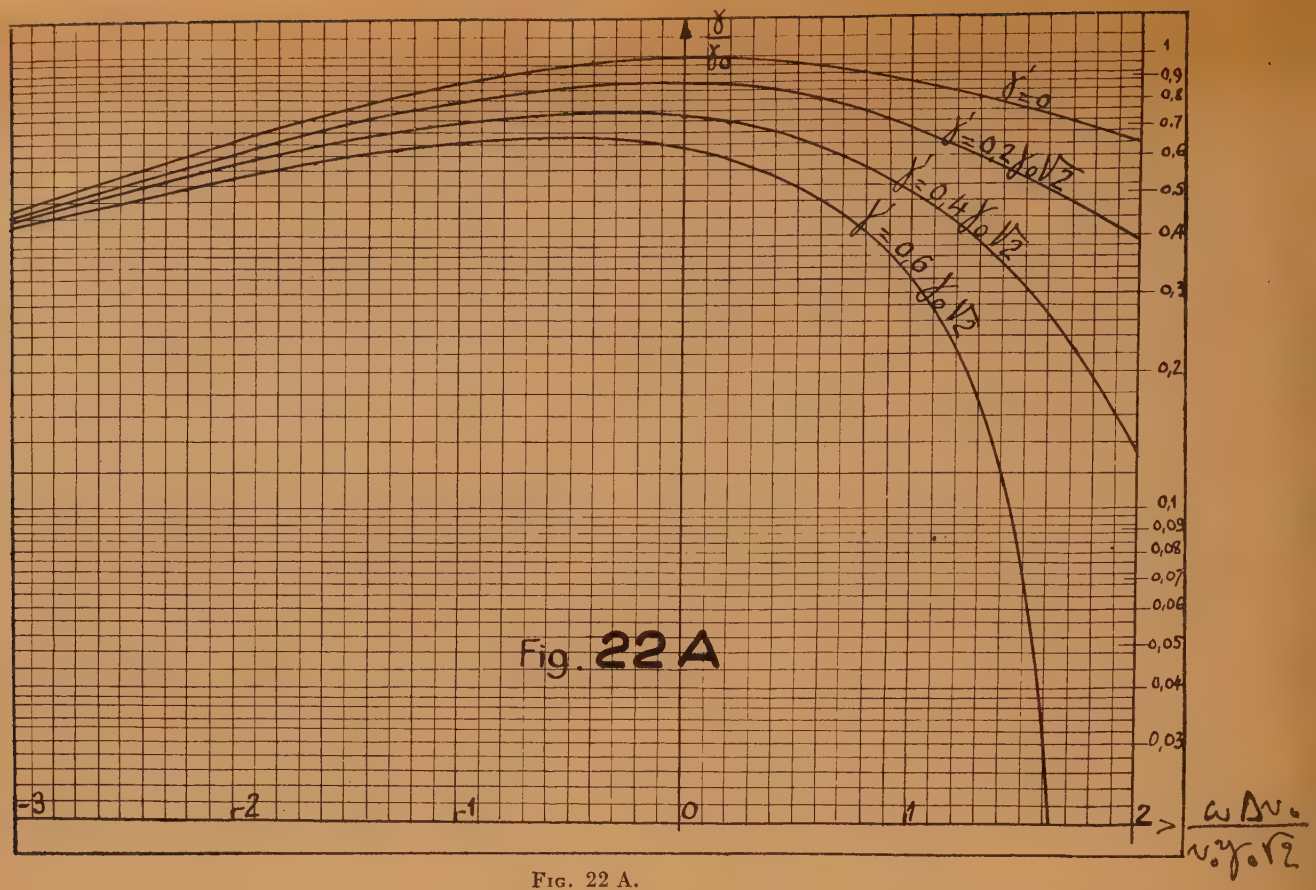

Fig. 22 A.

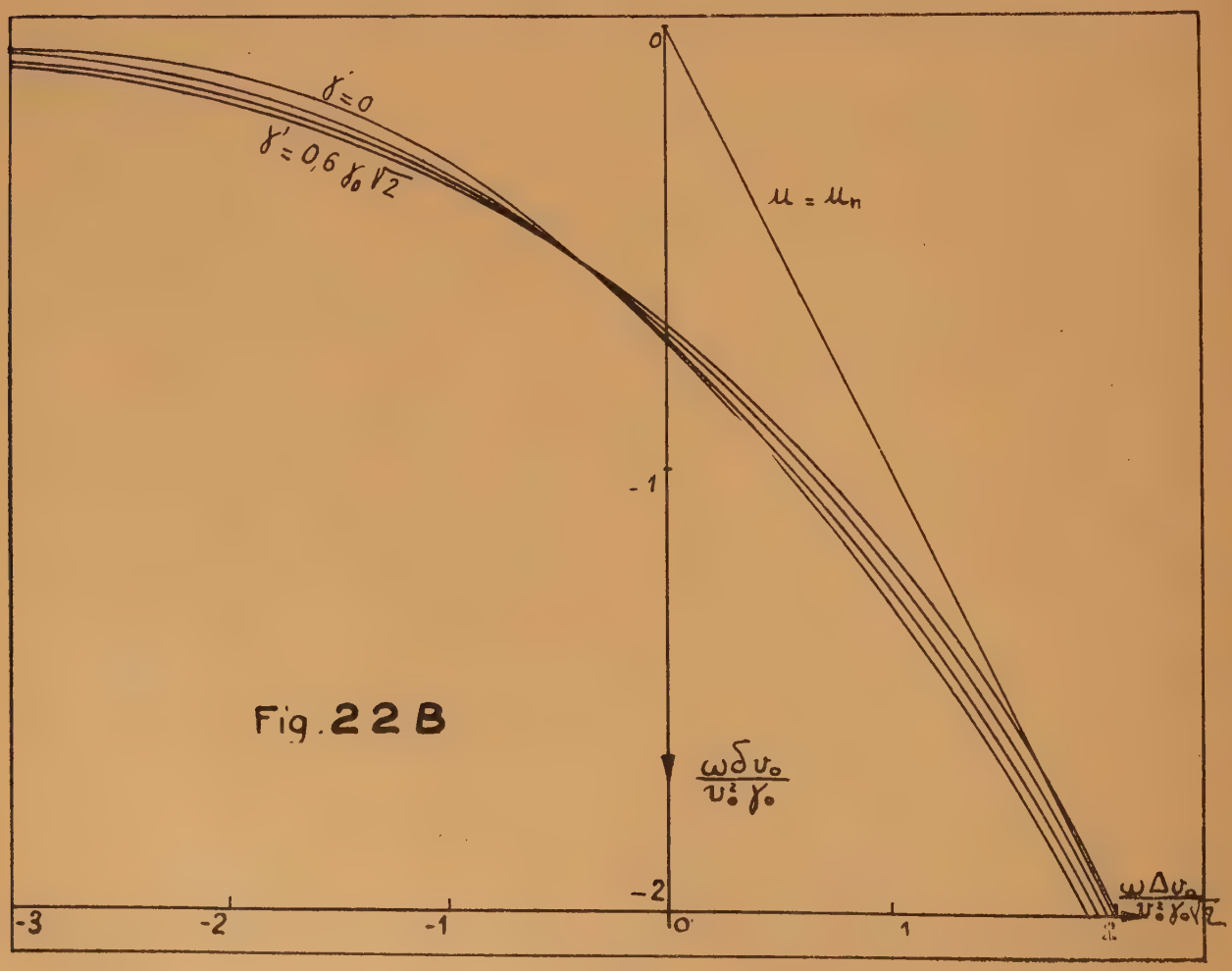

Fig. 22 B.

faut régler la vitesse électronique v_0 pour que le gain de l'amplificateur soit stable.

La figure 22 A montre que le gain restera toujous supérieur à 90 % de sa valeur maximum dans un domaine de vitesses de largeur totale

$$\Delta v_0 = 1{,}75 \frac{\gamma_0 v_0^2}{\omega}, \tag{138}$$

c'est-à-dire pour des tensions accélératrices stabilisées à quelques pour cent près.

D. Largeur de bande. — Pour terminer, nous allons montrer comment peut être étudié sur un modèle particulier le problème de la largeur de bande [55]. Si nous revenons à l'une des équations (133), (135) ou (136), on peut remarquer qu'une variation de fréquence entraînera une variation de coefficients K, δ et P.

K variera en même temps que u_n, d'autant plus que la ligne sera plus dispersive.

δ variera en particulier si les pertes ont lieu dans une paroi métallique : on sait en effet que la pénétration y varie avec la fréquence.

P variera en général avec ω, comme on le voit dans les deux exemples cités d'une ligne à cavités multiples et d'une ligne diélectrique.

La connaissance des dérivées

$$\frac{du_n}{d\omega}, \quad \frac{d\delta}{d\omega}, \quad \frac{dP}{d\omega}$$

suffirait pour étudier les variations du gain dans un certain domaine de fréquences autour de $\omega/2\pi$ et d'en déduire la largeur de bande du tube.

Par exemple, dans le cas du tube diélectrique c'est l'effet de dispersion qui est prépondérant. On obtient aisément la relation suivante :

$$\frac{du_n}{u_n} + (p-1)\frac{d\omega}{\omega} = 0. \tag{139}$$

Or les formules (132) montrent que le gain sera d'autant plus grand qu'on sera plus près de la fréquence de coupure, c'est-à-dire que p sera plus grand.

Avec un tube de longueur donnée, constitué par une matière de constante diélectrique déterminée, augmenter le gain ne pourra se faire qu'au détriment de la largeur de bande. Nous sommes amené à des conclusions analogues à celles déjà faites sur le tube à cavités multiples [56] ; l'expression (1) subsiste dans sa forme, mais les limitations usuelles ont été considérablement reculées.

Des applications numériques sur les formules (132) montrent ainsi qu'il serait possible, en utilisant une matière de constante diélectrique supérieure à 100, d'obtenir une amplification d'une quarantaine de décibels sur une largeur de bande de 40 Mc/s.

Conclusions. — Dans les théories que nous venons d'exposer, nous avons tout d'abord mis en évidence un mécanisme d'amplification. Cette première étude, faite sur un modèle de tube à cavités multiples, nous a conduit à des résultats qui sont analogues à ceux obtenus par divers auteurs : R. Wallauschek [16] sur un tube diélectrique, et J. R. Pierce [10] sur un modèle plus général. Au lieu d'entreprendre des discussions détaillées, nous nous sommes plutôt efforcé, à la fin de ce premier calcul, d'interpréter physiquement certains résultats, comme le transfert d'énergie du faisceau dans la ligne, et le mécanisme de modulation du faisceau à l'entrée du tube.

En résumé, cette première partie tendait davantage à donner une représentation approximative des phénomènes qu'une représentation détaillée.

Ce qui la caractérise, ainsi d'ailleurs que presque toutes les théories développées à ce jour sur le tube à onde progressive, c'est qu'on n'y tient aucun compte des phénomènes transversaux dont le faisceau est le siège. Autrement dit, toutes ces théories font du faisceau une étude unidimensionnelle.

Il nous a paru intéressant au contraire d'analyser de façon précise la nature des phénomènes à l'intérieur même du faisceau électronique, d'étudier, pour ainsi dire, la structure fine des ondes qui s'y propagent. Ce calcul pouvait au premier abord paraître d'un intérêt pratique restreint, étant donné les dimensions généralement réduites des faisceaux couramment utilisés. La poursuite de cette étude a montré au contraire que, malgré les apparences et par un phénomène assez inattendu, il ne suffit pas que les dimensions du faisceau d'électrons soient petites pour qu'on puisse se contenter d'en faire une étude unidimensionnelle : encore faut-il que les densités électroniques, c'est-à-dire en fin de compte le courant transporté, y soient faibles. Or les ordres de grandeurs sont tels qu'il est très facile de dépasser les valeurs limites admissibles pour que les phénomènes transversaux soient négligeables. Bien plus, le désir d'augmenter la puissance du tube conduira en pratique à se mettre toujours dans des cas où ces phénomènes transversaux sont prépondérants.

L'étude de ce que nous avons ainsi appelé la « structure fine » du faisceau s'imposait donc.

Nous l'avons développée d'abord sur un modèle qui se prêtait bien à une étude rigoureuse complète ; et nous avons choisi pour cela le tube diélectrique.

Il a été possible sur ce tube de mettre en évidence tous les types d'ondes susceptibles de se propager, et de montrer ainsi clairement les lacunes des théories unidimensionnelles ; pour illustrer l'importance des phénomènes transversaux dans le faisceau, on a encore représenté, sur la figure 23, la carte des champs électrique et magnétique tangentiels dans un mode de fonctionnement normal. Si les théories unidimensionnelles avaient pu mettre

55. Nous n'envisagerons que les limitations introduites par le mécanisme d'amplification lui-même et non pas celles qui seront en pratique imposées par les dispositifs d'adaptation à l'entrée et à la sortie du tube.

56. Voir chapitre I, 1°) Remarques.

en évidence les trois premières de ces ondes (d'une façon assez grossière d'ailleurs), il est bien évident qu'elles étaient impuissantes à rendre compte des ondes suivantes, pour lesquelles on a, à l'intérieur même du faisceau, des variations radiales de champ extrêmement rapides.

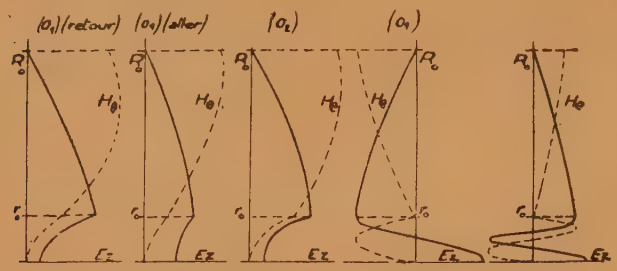

Fig. 23. — Carte des champs magnétique et électrique. Tube diélectrique, mode E_{01}.

De plus, la méthode de calcul employée nous a permis de généraliser ces résultats à une ligne de nature quelconque.

C'est alors d'une façon absolument générale que nous avons traité, pour des modes de fonctionnement répondant à des données pratiques, des problèmes tels que celui de l'atténuation à donner à la ligne et du réglage de la vitesse du faisceau, et poursuivi le calcul de la largeur de bande.

Nous espérons que ces études pourront apporter quelque lumière sur le fonctionnement du tube à onde progressive, et contribuer à perfectionner les réalisations auxquelles il donnera lieu.

Avant de terminer, il faut pourtant rappeler que nous nous sommes borné ici à des études de petits signaux, c'est-à-dire en définitive à l'étude de fonctionnements mettant en jeu des puissances alternatives très faibles et, en fin de compte, des rendements très médiocres.

Ce qu'il est possible de dire à l'heure actuelle, c'est que c'est ce mode de fonctionnement qui est le plus simple ; c'est le premier qui vienne à l'esprit et celui qui se prête le mieux à une analyse mathématique. Mais peut-être est-il permis de penser que ce n'est là qu'une première étape et que l'avenir verra se développer de nouveaux principes d'utilisation échappant aux critiques précédentes. La triode, à l'origine, a été, elle aussi, utilisée avec un rendement très médiocre, dans un fonctionnement en petits signaux, correspondant au régime dit « classe A ». On sait aujourd'hui l'employer au contraire dans des conditions beaucoup plus avantageuses en classes B ou C, avec un rendement remarquablement élevé ; et ce qui caractérise ces fonctionnements, c'est la prépondérance des phénomènes de saturation et, en définitive, l'emploi de *grands signaux*.

Rien ne prouve qu'il n'en sera pas de même de ce nouvel amplificateur pour ondes centimétriques. La technique y est évidemment bien différente de ce qu'elle était pour les triodes et, certes, les expressions « classe A, B ou C » ne sauraient s'y introduire de la même façon. Pourtant nous dirons que notre étude a été celle du fonctionnement en classe A, c'est-à-dire d'un fonctionnement où tous les phénomènes sont linéaires.

Ce n'est là, évidemment, qu'une première partie de ce que devrait être l'étude complète du tube à onde progressive. Nous voulons espérer que cette théorie que nous avons développée permettra pourtant, par les résultats généraux qu'elle fournit, de tirer déjà parti plus complètement de cet amplificateur et, peut-être, de servir d'amorce à une étude plus générale qui pourrait sans doute, alors, mettre en évidence des propriétés susceptibles de fournir aux problèmes d'amplification des ondes centimétriques des solutions nouvelles.

Manuscrit reçu en juin 1947.

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES

[1] Strutt, Van der Ziel, *Physica*, VIII, janvier 1941 ; IX, janvier 1942, p. 65.

[2] *Électronics Industries*, août 1946 ; décembre 1946, p. 57.

[3] *Électronics*, novembre 1946, p. 90.

[4] *Review of Scientific Instruments*, XXVII, n° 12, décembre 1946 ; p. 559.

[5] J. R. Pierce, *Bell Laboratories Record* XXIV, n° 12, décembre 1946, p. 439.

[6] G. Goudet, *L'Onde Électrique*, février 1946, p. 51.

[7] Gabor, *Journal of the Institute of Electrical Engineers*, septembre 1944, p. 128.

[8] R. Kompfner, *Wireless World*, 52, novembre 1946, p. 369.

[9] J. R. Pierce, L. M. Field *Proceedings of the I. R. E.*, **35** (1947), p. 108.

[10] J. R. Pierce, *Proceedings of the I. R. E.*, **35** (1947), p. 111.

[11] R. Kompfner, *Proceedings of the I. R. E.*, **35** (1947), p. 124.

[12] A. Blanc-Lapierre, P. Lapostolle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 23 Décembre 1946, **224** (1947), p. 104.

[13] A. Blanc-Lapierre, P. Lapostolle. *Annales des Télécommunications*, **1**, n° 12 (1946), p. 283.

[14] W. C. Hahn, *General Electric Review*, **42** (1939), p. 258.

[15] J. P. Voge, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 23 décembre 1946, **223** (1946), p. 1117.

[16] R. Wallauschek, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 6 janvier 1947, **224** (1947), p. 191.

[17] P. Lapostolle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 27 janvier 1947, **224** (1947), p. 268.

[18] P. Lapostolle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 17 février 1947, **224** (1947), p. 558.

[19] P. Lapostolle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 3 mars 1947, **224**, p. 814.

[20] Louis de Broglie, *Problèmes de propagation guidée des ondes électro-magnétiques*, p. 21 et suivantes, Gauthier-Villars, Paris, 1941.
L. Brillouin, *R. G. E.*, XL, 22 août 1936, p. 227.

[21] D. L. Webster, *Journal of Applied Physics*, juillet 1939, p. 501.

[22] Louis de Broglie, *Problèmes de propagation guidée des ondes électro-magnétiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1941, p. 63 et suivantes.

[23] S. Ramo, *Physical Review*, **56**, août 1939, p. 276.

[24] S. Ramo, *Proceedings of the I. R. E.*, **27**, décembre 1939, p. 757.

[25] G. Goudet, *Les fonctions de Bessel et leurs applications en physique*. Masson, Paris, 1943.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les accélérateurs électroniques linéaires

Vu et Approuvé
Paris, le 14 Mai 1947.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Signé : J. CABANNES.

Vu et Permis d'Imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris.
Signé : G. ROUSSY.

Imprimé par A. Taffin-Lefort, à Lille (France). — *Published in France.*